Septième Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes

(Marrakech, 30-31 mai et 1er juin 2002)

Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité

Mahdi Abdeljaouad
(Université de Tunis)

[Nous tenons à remercier M. Sélim al-Bassi, propriétaire du manuscrit de Jerba, qui nous a permis de consulter, de reproduire et d'étudier ce manuscrit dans les meilleures conditions possibles.
Ce travail n'aurait pu être achevé sans l'aide de M. Foued Anane, professeur au Lycée de Houmt-Souk (Jerba), nous lui en sommes sincèrement reconnaissant]

Introduction

En partant des travaux et publications sur les symboles mathématiques – particulièrement ceux de Woepke qui découvre en 1854 les symboles mathématiques maghrébins à travers un manuscrit d'al-Qalaṣādi (M ; 1486), de Mohamed Souissi qui, à partir de 1986, édite plusieurs traités d'algèbre du 15ème siècle dans lesquels ces symboles sont couramment employés et d'Ahmed Djebbar qui dès 1990 fait reculer de deux siècles leur pratique – nous ferons le point de l'état des recherches sur ce sujet ; puis, en utilisant la typologie des symboles mathématiques proposée par Nesselmann (1842) et remise à jour par Serfati (1980), nous présenterons les symboles algébriques maghrébins.

La description que nous donnerons de ces symbole repose sur un manuscrit tardif du 18ème siècle, découvert à Jerba, dans la marge duquel une utilisation abondante et systématique de la notation algébrique maghrébine attire l'attention, avec plus de trois cents apparitions dans des situations différentes, parfois simples et parfois complexes. Nous présenterons donc ce manuscrit et analyserons en détail l'emploi qui y est fait des symboles.

Notre travail comporte deux parties :

1. L'Utilisation des symboles dans l'algèbre arabe.
   - 1.1 Les recherches antérieures sur les symboles mathématiques arabes.
   - 1.2 Typologie de l'algèbre symbolique.
   - 1.3 Symboles mathématiques andalous … ou maghrébins ?
   - 1.4 Hypothèses.
   - 1.5 En guise de conclusion de la première partie.
2. Le manuscrit de Jerba.
   - 2.1 Présentation du manuscrit.
   - 2.2 Analyse détaillée des symboles utilisés dans ce manuscrit.
   - 2.3 Utilisation des symboles dans les problèmes algébriques.
   - 2.4 Compétences de l'auteur de la marge.
   - 2.5 Conclusion de la deuxième partie.

1. L'utilisation des symboles dans l'algèbre arabe

1.1 Recherches antérieures sur les symboles mathématiques arabes

Les recherches sur les symboles mathématiques arabes n'ont pas été nombreuses dans le passé : en fait, on peut considérer que Woepke[1] les a découverts en 1854, Cajori[2] les a popularisés en 1928. Les travaux de Mohamed Souissi sur al-Qalaṣādi et la thèse d'Ahmed Djebbar (1985) sur les mathématiques maghrébines ont ravivé l'intérêt qu'on leur porte. Par contre, de nombreux historiens des mathématiques, et en particulier Serfati[3] dans sa thèse de doctorat, les ignorent complètement.

Dans ses travaux de 1854, F.Woepke introduit sa découverte des notations algébriques arabes à partir d'un manuscrit d'al-Qalaṣādi. Pour lui, les traités d'algèbre des Arabes d'Orient "*présentent cette science sous une forme exclusivement discursive et parlée, et qui n'admet aucun genre de notation, tandis que l'algèbre des Grecs et celle des Indiens nous offrent déjà des commencements d'une notation algébrique. Je pense donc que la découverte d'une notation algébrique très développée chez les Arabes de l'Occident, peut offrir un certain intérêt pour l'histoire des sciences. Cette notation est presque aussi complète qu'elle pouvait l'être tant que l'algèbre elle-même restait numérique. Car, je me hâte de le dire, quelque honneur que l'invention de cette notation puisse faire aux géomètres arabes, elle ne diminue en rien la gloire de Viète ..."* (Notes … , page 162)

---

[1] François Woepke, *Notes* ... , vol. 39, pp. 162-5 , Paris 1854 et *Recherches* ... , 5ème série, vol. IV, Paris 1854.
[2] Florian Cajori, *A History* …. Nous utiliserons la réédition moderne de cette oeuvre publiée par Dover Publications Inc., New York, 1993.
[3] Michel Serfati, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 1, 1997.
Sans présenter une analyse systématique de cette thèse, nous lui proposons quelques commentaires :
L'auteur introduit une terminologie utile: relation cossique - nombres cossiques pour parler de Clavius (1608). Cependant sa conception de l'histoire des notations algébriques est assez surprenante: Il passe allègrement des Egyptiens (le *Hau* calcul) à Diophante puis à la Renaissance européenne, la parenthèse indienne et arabe étant qualifiées de temps naïfs. En fait tout ce qu'il dit au sujet de Clavius s'applique parfaitement aux algébristes arabes, d'autant plus que l'auteur a tendance à confondre les problématiques liées au concept de l'inconnue qui permet la mise en place d'une méthode de raisonnement par l'analyse et la représentation de l'inconnue par un signe qui permet une "mécanique aveugle du calcul". Cette confusion permanente entre le processus algébrique et l'usage des symboles constitue, d'après nous, une faiblesse caractérisée dans cette thèse.
Quelles sont les limitations des procédés purement rhétoriques? A cette question, on trouve chez Serfati plusieurs réponses tout au long de la thèse. Page 43, l'auteur pense que l'absence de symboles ne permet pas de résolution générale des équations étudiées jusqu'au XVIIème siècle, puisque chaque résolution requiert "*une ingéniosité particulière"*. Il faut en fait nuancer, puisque l'on sait que l'absence de notation symbolique n'a pas empêché Omar al-Khayyām, ni Sharaf ad-Dīn at-Tūsi de résoudre géométriquement toutes les équations de degré inférieur ou égal à trois.
L'auteur occulte complètement l'algèbre et la symbolique arabes, même dans les typologies retenues: L'algèbre arabe n'est explicitement classée ni dans le système diophanto-cossique, ni évidemment dans le système moderne né avec Viète, Descartes et Leibniz. On y fait allusion de très rares fois. On ne comprend pas pourquoi occulter al-Karāji et as-Samaw'al véritables concepteurs d'une symbolique des tableaux répondant aux caractéristiques établies par l'auteur, ainsi que la symbolique maghrébine elle aussi satisfaisant à d'autres caractères originaux. Dans le paragraphe illustrant le rôle du changement de variable, aucune allusion à Karāji ou à Sharaf ad-Dīn at-Tūsi qui en ont fait un outil majeur dans la résolution des équations. L'absence des Arabes dans cette thèse en fragilise l'argumentation. Elle surprend d'autant plus que les travaux de recherche et les publications récentes sur l'algèbre arabe sont nombreux et connus.
Concernant le fonctionnement des systèmes symboliques, l'auteur, grâce à son travail d'analyse, a effectivement fait apparaître plusieurs propriétés des systèmes symboliques, mais là où ne pouvons le suivre, c'est lorsqu'il affirme que ce sont des propriétés caractéristiques de ces systèmes. En effet, il n'est pas difficile de montrer que certaines de ces propriétés (prédicat absent, changement d'inconnue, délimitants, ...) se trouvent en fait dans l'algèbre rhétorique arabe, souvent objet de clarifications explicites.

Dans son article du Journal Asiatique, Woepke détaille sa découverte en présentant tous les symboles mathématiques arabes tels qu'ils apparaissent dans une copie de *Kashf al-asrār fi ^{c}ilm ḥurūf al-ghubār* d'al-Qalaṣādi. Pour confirmer la valeur de sa découverte et affirmer que l'emploi de ces symboles n'est pas isolé, il cite ce passage des *Prolégomènes* d'ibn Khaldūn : "*L'auteur [ibn al-Bannā] a pris pour guide dans cet ouvrage le traité intitulé Fikh al-Hissab (la science du calcul) de ibn al-Mon'im et le traité intitulé al-Kamil d'al-Ahdab. Il résuma les démonstrations de ces deux ouvrages, et autre chose encore en fait de ce qui concerne l'emploi technique des signes [ou bien des lettres de l'alphabet] dans ces démonstrations servant à la fois pour le raisonnement abstrait et pour la représentation visible (figurée), ce qui est le secret et l'essence de l'explication (des théorèmes du calcul) au moyen des signes*". (Woepke, *Recherches*, …page 371).

Woepke signale deux autres utilisations de symboles algébriques : la première dans une traduction latine par Gérard de Cremone d'un traité d'algèbre arabe et la seconde trouvée dans un manuscrit persan de la Bibliothèque Impériale où les notations algébriques sont différentes de celles d'al-Qalaṣādi. En effet, ce ne sont pas les premières lettres des mots qui sont utilisées, mais leurs dernières lettres : د pour *a'ḥād*, ر pour *joudhūr*, ل pour *māl*, پ pour *ka^{c}b*, لل pour *māl māl*, پپ pour *ka^{c}b ka^{c}b* et pour les inverses la lettre ا est ajoutée au quotient pour exprimer le terme *juz u'* : ار pour 1/x , لا pour 1/x² , للا pour $1/x^4$.

Dans son monumental *History of Mathematical Notations* publié en 1928, F. Cajori reprend les découvertes de Woepke et en rend compte minutieusement page 86, puis pages 93 et 94.

Consacrant aux symboles mathématiques un chapitre de son livre publié en 1974, Tobias Dantzig montre une méconnaissance totale de la notation algébrique arabe. Après avoir magnifié l'apport des Arabes en algèbre, Dantzig pose cette question intéressante : "*En dépit de tout ceci, les Arabes n'ont pas fait progresser d'un iota la notation symbolique; c'est un des phénomènes les plus étranges de l'histoire des mathématiques que les Arabes, en s'assimilant l'algèbre des Hindous, n'aient pas retenu leurs symboles syncopés si ingénieux. Tout au contraire, ils sont revenus à l'algèbre terminologique des Grecs et même pendant un certain temps, ils sont allés jusqu'à éliminer de leurs traités d'algèbre les symboles numériques, préférant écrire les nombres en entiers. Serait-ce que les Arabes ont poussé à l'extrême leur prétention d'être les héritiers intellectuels des Hellènes, jusqu'à refuser de reconnaître ce qu'ils devaient dans ce domaine aux Brahmanes?"* (Dantzig, *Le nombre ...*, pp. 87-8).

Dans les chapitres concernant l'algèbre de leurs ouvrages d'histoire des mathématiques, ni B.L. van der Waerden (1985), ni J.L. Berggren (1986), ni A.S. Saydan (1986), ni Jacques Sesiano (1999) ne font aucune référence à l'algèbre maghrébine ou aux symboles algébriques arabes.

Dans ses éditions de traités de mathématiques maghrébines, Mohamed Souissi montre de nombreuses occurrences de l'usage des symboles maghrébins, comme c'est le cas dans les manuscrits d'al-Qalaṣādi[4] ou d'ibn Ghāzi. Chez ce dernier, on trouve traité complètement en symboles arabes le fameux problème de Sebta[5]. De même, Ahmed Djebbar évoque souvent les symboles algébriques arabes. Il leur propose dans sa thèse de doctorat (1985) une typologie que nous reprendrons dans la suite de ce travail. Par ailleurs, Driss Lamrabet (1994) consacre un chapitre de sa thèse aux symboles arabes et plus particulièrement à ceux utilisés par ibn Qunfudh (1320-1406).

[4] Al-Qalasādi, *Kasf al-asrār ^{c}an ^{c}ilm hurūf al-ghubār*.
[5] Ibn Ghāzi, *Bughyatu at-Ṭullāb fi sharh munyaty l-hisāb*.

1.2 Typologie de l'algèbre symbolique

La définition d'Ahmed Djebbar du terme *symbolisme* comme étant "*tout ce qui représente un objet, un concept ou une opération mathématique et qui, par sa concision simplifie l'expression, l'enchaînement des propositions et la succession des opérations"* (Thèse, note 90, page 120) sera retenue dans ce qui suit. Les symboles apparaissent dans toutes les branches des mathématiques : en arithmétique avec les différentes numérations, en géométrie avec les lettres désignant des éléments d'une figure, en algèbre avec des symboles remplaçant les inconnues, mais aussi en analyse. L'introduction des symboles a été progressive et a rencontré de nombreux obstacles; elle est tributaire de l'environnement scientifique, technologique et social dans lequel le travail du mathématicien se déroule, et en particulier des outils utilisés pour l'aide aux calculs (abaques, planches à poussière, ...). Différentes étapes nécessaires ont été identifiées: une symbolique numérique est indispensable pour toute extension de l'emploi de symboles dans des situations plus complexes que celles de l'arithmétique, de nombreuses hésitations dans le choix des signes représentant les objets ou concepts représentés, des phases d'acceptation, de rejet ou d'amélioration et d'apprentissage de la symbolique et enfin une fonctionnalité des signes utilisés qui leur procure une vie autonome et un dynamisme créateur de nouveaux résultats.

Posons-nous enfin la question de savoir s'il n'existait pas, dans la pratique traditionnelle des mathématiciens, deux manières simultanées de traiter une question ?

1. une recherche d'explicitation du problème et de sa solution effectuée soit à partir de gestes mécaniques sur des outils (abaque chinoise, tablettes sumériennes, ...), soit à partir de représentations des mots et des expressions utilisées par des signes dessinés sur une planche à poussière (*takht* , ...)
2. une rédaction canonique formelle et rhétorique destinée à être communiquée aux disciples, aux élèves et aux lecteurs.

Classification des symboles algébriques

Nous commencerons par une classification des symboles algébriques utilisant la terminologie inspirée de la thèse de Michel Serfati, dans laquelle les symboles apparaissant dans un texte algébrique sont des chiffres, des figures, des signes conventionnels pour l'inconnue et ses puissances, des assembleurs et des délimitants.

- **Les chiffres** sont des signes graphiques conventionnels représentant un nombre limité d'entiers et permettant d'exprimer de la manière la plus concise tout nombre entier, grand ou petit, et toutes sortes de nombres (rationnels, irrationnels ...). Les numérations antiques nous fournissent un nombre considérable d'exemples de chiffres: traits superposés ou parallèles, marques sur une tablette en argile, dessins figuratifs, idéogramme, hiéroglyphe, lettres de l'alphabet (grec, hébraïque ou arabe), signes conventionnels. Les calculateurs arabes d'Orient ont, de leur côté, utilisé les dix chiffres d'origine indienne ; quand aux Maghrébins, s'inspirant eux aussi des Indiens, ils ont utilisé d'autres chiffres appelés chiffres *ghubār* qui leur serviront de base pour leurs représentations symboliques des fractions, des radicaux et des expressions algébriques.
- **Les figures géométriques**, essentiellement des segments de droites et des rectangles, ont été utilisées par les Grecs pour démontrer des identités remarquables et d'autres résultats algébriques. Plusieurs siècles après Euclide, l'idée d'accompagner sur une figure les étapes d'une démonstration algébrique, exprimées en phrases, constituait la seule méthode acceptée par les algébristes, légitimant les algorithmes qu'ils proposaient. On la retrouve chez al-Khwārizmi et ses successeurs, mais aussi en Europe jusqu'à chez Viète. Les algébristes utilisant les symboles algébriques n'y ont presque jamais recours.
- **Des signes conventionnels** peuvent représenter le "requis inconnu", c'est-à-dire la quantité cherchée qui permet de résoudre un problème. Pour Diophante le signe ς remplace le mot

arithmos (le nombre à déterminer). Les Chinois eux utilisent l'idéogramme 元 pour désigner l'"inconnue céleste". Pour les Maghrébins, la lettre ش représente le mot *Shay* (la chose inconnue). Viète propose d'utiliser les voyelles A , E , I , ... pour désigner les grandeurs requises, les consonnes B , C , D , ... étant réservées aux grandeurs données. Quant à Descartes, il suggèrera l'emploi des dernières lettres de l'alphabet (x , y , z) pour représenter les grandeurs requises et les premières lettres de l'alphabet (a , b , c , ...) à la place des constantes. Cette convention a été conservée jusqu'à nos jours.

Ainsi le "requis inconnu" peut être représenté soit par une lettre (souvent une abréviation chez Diophante et chez les Maghrébins, puis chez les Européens de l'ère cossique), soit par un idéogramme (chez les chinois). Avant Viète, les "constantes", c'est-à-dire les paramètres variables contenus dans l'énoncé, étaient fixées arbitrairement et ne nécessitaient pas d'être représentées par un symbole. Tout problème algébrique se ramenait donc à un problème numérique dans lequel un nombre indéterminé, fonction de données numériques explicitées au début de la recherche de solution, devait être trouvé. L'idée de Viète de représenter les "constantes" par des lettres va révolutionner la pratique algébrique et être adoptée avec beaucoup de bonheur par ses successeurs.

Chez Diophante et chez les Maghrébins, le carré et le cube de l'inconnue sont représentés par l'initiale ou la terminale des termes qui les désignent, les autres puissances étant obtenues par juxtaposition de ces deux signes :

	unités	**inconnue x**	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
Diophante	M^0	ς	Δ^γ	K^γ	$\Delta^\gamma\Delta$	ΔK^γ	$K^\gamma K$
Maghrébins	ع	ش	م	ک	م م	م ک	کک

- **Les assembleurs** sont des signes graphiques remplaçant les termes opératoires: addition, soustraction, multiplication, division, racine carrée, racine multiple, fraction, etc. Diophante utilise le signe ⋔ pour représenter l'opération de soustraction. Les Arabes réservent un ou deux signes pour chaque opération arithmétique.

- **Les délimitants** sont des signes associés à l'exécution des instructions ; ils permettent de préciser sur quels objets et dans quel ordre la lecture de la représentation symbolique doit se faire. C'est par exemple le rôle des parenthèses. Les délimitants apparaissent très tardivement dans la notation algébrique. Nous verrons que l'algèbre symbolique maghrébine a inventé un moyen pour en représenter quelques-uns et des conventions pour lever les ambiguïtés éventuelles.

Une typologie des textes algébriques

Nombreux sont les auteurs qui ont essayé de proposer une typologie des écritures algébriques. La plus connue et la plus ancienne est celle proposée par G.F.H. Nesselman en 1842, dans son livre *Die Algebra der Griechen*. Reprenons ce texte devenu classique : "*En ce qui concerne la représentation formelle des opérations algébriques et des équations, nous pouvons distinguer, dans le développement de cette science, trois étages historiquement et fondamentalement distincts. Le premier étage et plus bas degré peut s'appeler algèbre rhétorique; il s'agit de calcul entièrement exprimé en mots, ce qu,i en l'absence de tout signe, consiste à détailler en langue ordinaire le déroulement complet du calcul. A cette catégorie, ... se rattachent les algébristes arabes et persans connus à ce jour, chez qui nous ne découvrons pas la moindre trace de langage algébrique en signes, ...; de même encore les premiers Italiens et leurs élèves, par exemple Regiomontanus, sont à classer avec eux.*

On peut appeler le second étage algèbre syncopée . L'exposé est de nature rhétorique comme les précédents, mais utilise, pour des concepts et des opérations qui reviennent fréquemment, toujours les

mêmes abréviations à la place de mots entiers. A ce niveau, se situe Diophante et ses successeurs européens jusqu'au milieu du XVIIème siècle, bien que Viète ait déjà semé dans ses écrits le germe de l'algèbre moderne, germe qui ne s'est pourtant développé que quelque temps après lui. Et en effet, le troisième étage, celui de l'algèbre symbolique, représente toutes les formes et opérations possibles dans une langue de signes entièrement constituée et indépendante de l'expression orale, ce qui rend tout discours rhétorique inutile." (in chapitre VII : "*La forme de l'algèbre de Diophante, nature de sa méthode de notation et de son rapport avec d'autres méthodes*", traduction de Colette Bloch, citée par Michel Serfati dans sa thèse, pp. 20-21).

La plupart des historiens des mathématiques se sont inspirés de cette typologie et l'ont plus ou moins affinée. C'est ainsi que nous procèderont pour caractériser la notation symbolique arabe en nous inspirant de quelques remarques d'Ahmed Djebbar.

a) Type rhétorique : Le texte ne contient aucun symbole.Les nombres sont exprimés par leurs noms - aucun type de chiffres n'est utilisé (pour les textes arabes, pas de chiffres jummal, ni de chiffres arabo – indiens). Les fractions sont présentées par leur nom, ainsi que les racines de tout ordre. Les équations sont évidemment décrites par des expressions et des phrases.

Un texte de type rhétorique n'est pas difficile à caractériser : n'y apparaissent que les signes de l'alphabet usuel rassemblés en mots. Un très grand nombre d'ouvrages arabes d'algèbre, dont celui, fondateur, d'al-Khwārizmi, ou de ses successeurs en Orient, Abu Kāmil ou al-Karāji, et en Occident Ibn al-Bannā ou Ibn Badr, sont de type rhétorique. Quant à as-Samaw'al, disciple d'al-Karāji, il écrit les nombres entiers (positifs et même négatifs) en chiffres (arabo – indiens) et utilise les tableaux pour représenter les expressions algébriques.

Les textes grecs de géométrie, et les textes arabes qui s'en inspirent, (tels que les traités d'algèbre de Thābit ibn Qurra ou de Omar al-Khayyām), dans lesquels une figure est dessinée et ses composantes désignées par des lettres que l'on retrouve dans les démonstrations, sont eux-aussi difficiles à classer dans cette typologie. Nous considérerons qu'ils constituent un cas particulier du type rhétorique, le rhétorique géométrique, norme universelle – depuis Euclide – des rédactions des démonstrations de géométrie.

b) **Type syncopé :** Le texte est essentiellement rhétorique, mais il contient des "idéogrammes arithmétiques", c'est-à-dire des chiffres composant un nombre, et des représentations graphiques de termes, d'expressions ou d'opérations mathématiques. Ces symboles peuvent soit accompagner leur équivalent verbal, soit le remplacer. Le type syncopé n'est ni homogène, ni uniforme. De nombreux textes appartenant à ce type seront plus ou moins envahis par des symboles ayant des fonctions différentes: répétition et illustration figurée du texte, signes indispensables à sa compréhension ou carrément séquences de signes remplaçant un raisonnement entier. Nous proposons de subdiviser ce type en trois sous-types suggérés par Ahmed Djebbar dans sa thèse.

- **Symboles d'illustration** : Ils accompagnent le texte (rhétorique) mais ne sont pas indispensables. Ces symboles ne sont pas nécessaires pour comprendre le texte. Dans les manuscrits arabes, de telles représentations sont introduites par l'expression و صورته هكذا (*wa sūratuhū hākadhā* , c'est-à-dire : sa représentation se présente ainsi).
- **Symboles de substitution** : Ils sont indispensables pour la lecture du texte. C'est ce que l'on trouve essentiellement dans l'*Arithmetica* de Diophante. Le mot *arithmos* (le nombre indéterminé) est carrément remplacé par la lettre ς, le mot *dynamos* (carré du nombre indéterminé) par le signe Δ^{γ}. Dans de nombreux textes algébriques arabes, les chiffres *jummal* et les chiffres indiens peuvent être utilisés en l'absence de leur équivalent en mots. On y trouvera ainsi « 25 » au lieu de l'expression "vingt-cinq", « ¾ » au lieu de "trois-quarts", « $\overrightarrow{5}$ » au lieu de "*Jidhr khamsa*" (racine carrée de 5). Mais, nous n'y avons pas encore trouvé de symboles algébriques utilisés en substitution de leur équivalent rhétorique.

- **Symboles dynamiques** : Des séquences complètes d'opérations écrites sous forme symbolique sont intercalées dans le texte, soit en illustration, soit en substitution. Des opérations numériques peuvent être explicitées en mots et en phrases, puis illustrées dans une "fenêtre" montrant les étapes du calcul. C'est par exemple fréquent pour montrer la multiplication de deux nombres. Des raisonnements utilisant un enchaînement autonome de propositions toutes écrites en symboles algébriques peuvent :

  - illustrer le même raisonnement déjà présenté sous forme rhétorique.
  - se substituer complètement à un texte rhétorique.

L'exemple arabe le plus connu de notation symbolique dynamique est le traitement du problème de *Sebta* (Ceuta) par Ibn Ghāzi[6].

c) Type symbolique : C'est ce que l'on utilise aujourd'hui, une algèbre quasiment dégagée de la rhétorique, les inconnues et les constantes étant remplacées par des lettres. Cet usage généralisé des lettres de l'alphabet apparaît pour la première fois chez Viète et devient opératoire avec Descartes et se conceptualise avec Leibniz, à qui l'on doit un grand nombre de symboles mathématiques encore en usage de nos jours. C'est une sorte d'arithmétique universelle portant sur des chiffres, des lettres, des signes conventionnels, des assembleurs et des délimitants. Pour Georges Ifrah (1999), l'algèbre symbolique consiste à "*employer systématiquement des lettres pour désigner des variables, inconnues ou constantes indéterminées. Notre x actuel est entièrement indépendant de la nature des éléments particuliers qu'il est censé représenter. Autant dire que la notation littérale algébrique a permis de passer de l'individuel au collectif, une expression telle que* $ax^2 + bx + c$ *constituant non plus le symbole d'une grandeur particulière, mais bien la forme caractéristique de toute une catégorie de nombres. Autrement dit, en réalisant l'équivalence entre les propositions mathématiques exprimées de manière verbale et littéraire avec les expressions correspondantes formées exclusivement de lettres et de symboles représentant des nombres quelconques, on a donc pu désormais passer d'un raisonnement individuel, portant sur des propriétés spécifiques, à un raisonnement global sur les propriétés communes à tous les cas d'une même espèce, élevant dès lors la science algébrique à un niveau très supérieur à celui d'une simple sténographie circonstanciée."* (tome 2, page 456).

Au cours du siècle dernier, l'algèbre symbolique s'est développée et s'est étendue au point d'avoir ses propres théories, ses problèmes ouverts, ses applications internes. Elle est devenue un langage et un outil indispensables à la conceptualisation et à la résolution des problèmes dans toutes les branches du Savoir.

1.3 Symboles mathématiques andalous … ou maghrébins ?

L'origine de l'emploi des symboles en algèbre arabe reste, aujourd'hui encore, méconnue. Au 19ème siècle, l'orientaliste Woepke parlera de la *notation algébrique des Arabes de l'Occident* et, au 20ème siècle, Ahmed Djebbar du *symbolisme algébrique maghrébin*[7].

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons d'abord donner une liste d'œuvres, connues de nos jours et contenant des symboles mathématiques algébriques et celles qui en sont exemptes; puis nous citerons quelques indices et témoignages anciens sur l'usage des symboles mathématiques arabes et nous terminerons par quelques hypothèses concernant la genèse de ces symboles.

Chronologie de quelques ouvrages algébriques

Nous retiendrons, à la suite de Lamrabet (1994), les quelques ouvrages arabes d'algèbre, connus aujourd'hui et rédigés entre les 12ème et 16ème siècles :

---

[6] Ibn Ghāzi, *Bughyatu ...,* édition Mohamed Souissi, page 302.
[7] Ahmed Djebbar, *La production scientifique arabe, ...* (pp. 343-368).

12ème siècle :

Dans les ouvrages de cette époque, les nombres entiers et les fractions sont illustrés par des symboles spécifiques, et les opérations sur ces nombres particuliers occupent des fenêtres au milieu du texte rhétorique. Seules des traces de symboles algébriques s'y trouvent :

- *Kitāb al-Bayān wa-t tudhkār fi ^{c}ilm masā'il al-ghubār* d'Abu Bakr al-Ḥassār (Lamrabet n° 330, manuscrit de Rabat BG K 222 et étudié par Djebbar et Aballagh en 1987)
- *Kitāb ṭalqīḥ al-afkār fil a^{c}mali bi rushūm al-ghubār* d'ibn al-Yāsamīn (Lamrabet n° 347, et thèse de magistère de Touhami Zammouli)

Le ouvrage d'algèbre du 12ème siècle écrit par Abu-l Qāsim al-Qurashi (m. 1183), a eu par la suite un grand écho, mais aucune trace n'en a été retrouvée à ce jour. (Cf. Lamrabet n°337).

13ème siècle et début du 14ème

Les ouvrages retrouvés sont exempts de symboles algébriques. Par contre les nombres entiers et les fractions sont représentés par des symboles spécifiques, ainsi que les opérations sur ces nombres particuliers. C'est ce qui apparaît en particulier dans les deux traités suivants :

- *Fikh al-ḥisāb*, d'ibn Mun^{c}im al-Abdari (mort en 1228) (cf. Lamrabet n° 352, manuscrit de Rabat BG Q 416)
- *Al-Maqālāt al-'arbaa^{c}*, d'ibn al-Bannā al-Marrākushi (1256-1321) (Lamrabet n° 382).

Deux ouvrages didactiques, caractérisés par leur concision, ont eu une renommée profonde par la suite et ont souvent été commentés. L'usage des symboles y est totalement absent.

- *al-Urjūza al-Yāsminīyā* d'ibn al-Yāsamīn écrite en 1191 à Séville (édité par Jalal Chawki en 1988).
- *Ṭalkhīs 'a^{c}māl al-ḥisāb* d'ibn al-Bannā (édité et traduit en français par Mohamed Souissi en 1969)

Ibn al-Bannā lui-même rédige un commentaire de son *Ṭalkhīs 'a^{c}māl al-ḥisāb* qu'il intitule *Raf^{c} al-ḥijāb* (édité et traduit en français par Mohamed Aballagh en 1988), mais ce traité est lui aussi complètement rhétorique.

Deuxième moitié du 14ème siècle

Les ouvrages suivants contiennent tous des symboles arithmétiques et algébriques :

- *Ṭakhsīs ūli-l albāb fi sharḥ ṭalkhīs 'a^{c}māl al-ḥisāb* (vers 1350), d'al-Ghorbi (Lamrabet n° 399, manuscrit de Rabat BG D328)
- *Ṭaḥsīl al-munā fi sharḥ ṭalkhīs ibn al-Bannā* (vers 1360), d'al-Muwahhidi (Lamrabet n° 414, manuscrit de Rabat Q 1081)
- *Ḥaṭ an-niqāb ^{c}an wujūh a^{c}māl al-ḥisāb* (Fès, 1370), d'ibn Qunfudh, (Lamrabet n° 425, manuscrit de Rabat BG: D 1678)
- *Sharḥ al-ṭalkhīs* d'al-Uqbāni (m. en 1408), (Lamrabet n° 428, et l'étude de Anissa Harbili)
- *At-Ṭamḥis fi sharḥ at-ṭalkhīs* d'ibn Ḥaydūr at-Tādili (mort en 1416), (Lamrabet n° 429, manuscrit de Rabat G 112)
- *Rashfat ar-rudhāb min thughūr a^{c}mal al-ḥisāb* (XIVème siècle), d'al-Qatrawāni, (Lamrabet n° 430, manuscrit de Rabat Q 416).
- *Ḥāwi al-lubāb* d'Ibn Majdi (1366-1447). (Thèse d'Ahmed Djebbar, page 95 et page 120)

15ème siècle et après

al-Qalaṣādi (1412-1486)
- *Sharḥ ṯalkhīs 'aᶜmāl al-ḥisāb* (1436) (édition de Farès Bentaleb en 1999)
- *Kashf al-asrār ᶜan ᶜilm ḥuruf al-ghubār* (éditions de Woepke en 1859, puis de Mohamed Souissi en 1988)
- *At-Ṭabsira al-wādhiḥa min masā'il al-'aᶜdād al-lā'iḥa* (pré-édité par Hmida Hedfi en 1998)

Ibn Ghazi al-Maknāsi (1437-1513)
- *Bughyat at-ṭullāb fi sharḥ munyat al-ḥisāb* (14_() (édition de Mohamed Souissi en 1983)

Témoignages

Les algébristes maghrébins du 13ème siècle ont été avares en descriptions ou en justifications de leurs pratiques éventuelles des symboles algébriques. Ce n'est qu'au siècle suivant que les explications sont formulées et les justifications fournies. Un auteur du 12ème siècle, Abu Bakr al-Ḥassār est cité généralement comme ayant été l'un des premiers mathématiciens à avoir utilisé des symboles.

Abu Bakr al-Ḥassār (12ème)
Lorsque dans *al-Muqaddima*, l'historien ibn Khaldūn (mort en 1406), présente l'algèbre, il commence par citer al-Ḥassār, "*Parmi les meilleurs ouvrages <de calcul> à notre époque, au Maghreb, <il y a> le petit livre d'al-Hassār*" , puis ibn Khaldūn évoque *Rafᶜ al-ḥijāb* d'ibn al-Bannā et ajoute : "*Il y a exposé avec concision les preuves <du calcul> en substituant aux symboles conventionnels des justifications théoriques explicites*" (traduction de Aballagh, thèse page 6). Ce paragraphe a été considéré par les auteurs modernes comme un hommage à la fois à al-Ḥassār et à ibn al-Bannā, mais aussi une référence à deux approches différentes de l'arithmétique et de l'algèbre, la première utilisant des symboles mathématiques et la seconde rhétorique pure.

al-Muwaḥḥidi (1345-1400)

En préface de *Taḥsīl al-munā fi sharḥ talkhīs ibn al-Bannā* (vers 1382), encore un autre commentaire du *Talkhīs*, le mathématicien al-Muwaḥḥidi justifie son recours à l'écriture symbolique, qu'elle soit arithmétique ou algébrique, de la manière suivante : "*Je voudrais, ici, expliquer les termes du Talkhīs, à l'aide des expressions arabes, et illustrer ses exemples à l'aide des chiffres ghubār, malgré le fait qu'ils soient non arabes ('aᶜjam); car pour moi, la clarté est louable à chaque instant, quelque soit le langage employé".* (Cité par Aballagh[8], page 34). Pour al-Muwaḥḥidi, l'écriture symbolique est bien une manière étrangère de représenter les nombres et les expressions algébriques, son emploi est néanmoins recommandé car elle aide à clarifier le texte rhétorique. Il apparaît ainsi que l'écriture symbolique algébrique n'a pu se concevoir que grâce à la pratique des chiffres *ghubār* – chiffres arabes d'origine indienne utilisés en Andalousie et au Maghreb – et de l'arithmétique indienne.

Ibn al-Hā'im (1352-1412)

Les témoignages extérieurs à la communauté des mathématiciens maghrébins vont eux aussi se multiplier. Il y a le témoignage d'un mathématicien né et éduqué en Egypte, ibn al-Hā'im, et dont la carrière s'est déroulée à Jérusalem et à la Mecque.

Dans *Sharḥ al-urjūza al-Yāsminīyā* (1388), ibn al-Hā'im montre sa connaissance des œuvres maghrébines, en particulier celles d'ibn al-Bannā, et illustre sa familiarité avec les mathématiciens andalous et maghrébins en citant quelques anecdotes plaisantes[9]. Sa référence aux symboles

[8] *ibid.*
[9] "*un sage d'al-Andalus lui proposa, alors que j'étais présent, un problème dont la solution est évidente, mais dont la résolution à l'aide de l'algèbre est difficile. Il lui demanda de lui expliquer la manière de le résoudre algébriquement …"* (*Sharḥ* …, folio 33b). En fait, Ibn al-Hā'im utilisera extensivement la representation des

algébriques est rapportée à ceux parmi *ahl al-iṣṭilāh* (les spécialistes de la terminologie) qui utilisent l'arithmétique indienne : "*De même, en écriture indienne ou ghubār, ils [ahl al-iṣṭilāh], ils attribuent à chaque espèce un signe; comme le Shīn pour les Shay (les choses), le Mīm pour le Māl (le carré), le Kāf pour les cubes et ainsi de suite, et ils n'attribue aucun signe existentiel au nombre (la constante), il s'en suit que l'absence de signe est un signe.*"(folio 6b)[10]. Remarquer que ce texte conforte notre hypothèse que l'usage des symboles algébriques est intimement lié à celui de l'arithmétique indienne.

Indices internes

Ibn al-Yāsamīn (mort en 1204)

Alors que tout au long du *Kitāb ṭalqīḥ al-afkār fil a^cmali bi rushūm al-ghubār* d'ibn al-Yāsamīn, l'approche est complètement rhétorique, on note l'apparition soudaine et sans aucune explication de symboles algébriques dans deux formules (Thèse de Zammouli, pages 137 et 231), puis on constate que, vers la fin du manuscrit, l'auteur ordonne au lecteur de "*placer la lettre Jim au dessus du nombre 60 pour signifier que c'est une fois la racine de 60*" (page 263).

Page 137 : Sachant que la somme de n entiers successifs commençant par 1 est égale à 55, quelle est la valeur de n ? . L'auteur propose deux solutions, la seconde étant algébrique, permet une mise en équation de la forme $x^2 + x = 100$. Après l 'avoir énoncée sous forme d'une phrase, il la présente sous forme symbolique, sans donner aucune explication : « 100 لـــ $\overset{\text{ش}}{\overline{1}}$ $\overset{\text{م}}{\overline{1}}$: وصوته»

Page 231 : « *Une quantité dont on a retiré la racine (carrée) ; on multiplie la moitié de ce qui a été retiré par la moitié de ce qui st resté et l'on trouve la quantité initiale»* .En termes modernes, cela revient à résoudre l'équation : $(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2})\frac{x}{2} = x^2$. C'est au moment où l'auteur se propose de multiplier les expressions polynomiales qu'il introduit les symboles algébriques sans aucune explication. Il écrit :

« *la manière d'effectuer son produit consiste à le poser ainsi :*

$\overset{\therefore}{\frac{1}{2}}$ لا $\overset{\text{م}}{\overline{\frac{1}{2}}}$

$\overset{\therefore}{\frac{1}{2}}$

puis tu multiplies la moitié de la quantité par la moitié de la racine[11] *... »*

On constate que l'opération est présentée de manière à ce que chaque expression algébrique occupe une seule ligne, les calculs ultérieurs se faisant d'une manière rhétorique. Rien dans cette écriture symbolique ne laisse présager que l'on va effectuer une multiplication.

Ibn Qunfudh al-Qusantīni (1320-1406)

Vers 1370, ibn Qunfudh rédigeait à Fès son *Haṭ an-niqāb ^can wujūh a^cmāl al-ḥisāb* qui est l'un des commentaires du *Ṭalkhīs 'a^cmāl al-ḥisāb* d'ibn al-Bannā. On trouve dans ce traité, dont le caractère pédagogique remarquable est à souligner[12], la première présentation connue des symboles algébriques maghrébins, détaillée et plusieurs fois illustrée sur des exemples. L'auteur explique[13] :

fractions maghrébines dans *Murshidat at-ṭālib ilā asnā al-maṭālib fi ^cilm al-ḥisāb.* (voir l'édition de Bentaleb, pages 110, 117-8, 125-8, 131-4, 141, 143 et 147-8.

[10] "وكذلك في الرسم بالهندي أو الغبار يجعلون لكل نوع علامة كالشين للأشياء والميم للمال والكاف للكعب وميمين لمال المال وهكذا . ولا يجعلون للعدد علامة وجودية فيصير ترك العلامة علامة له . "

[11] «وصفة ضربه تنزله هكذا : ... ، ثم تضرب نصف مال في نصف جذر »

[12] Voir thèse de Magistère de Youssef Guergour en 1990.

[13] Citation de Ibn Qunfudh, tirée de la pré-édition de Youssef Guergour, page 166, ligne 11:

"*Sache que pour représenter les carrés, tu en écris le nombre que tu surmontes de la lettre Mīm. Ainsi tu écriras trois carrés* $\overset{\text{مـ}}{\overline{3}}$ *et si tu as des carrés-carrés, tu noteras* $\overset{\text{مـ}}{\overset{\text{مـ}}{\overline{3}}}$ *et ainsi de suite. Pour représenter les racines (Jidhr), tu en écris le nombre, que tu surmontes de la lettre Shīn. Ainsi tu noteras trois Jidhr :* $\overset{\text{شـ}}{\overline{3}}$ *ou* $\overset{\therefore}{3}$ *; de même [tu noteras] un demi Jidhr et cinq sixièmes et un quart d'un sixième de Jidhr :* $\overset{\text{شـ}}{\frac{1\ 5}{4\ 6}}$ *ou* $\overset{\therefore}{\frac{1\ 5}{4\ 6}}$. *Les nombres sont écrits comme il a été vu précédemment, sans aucune modification. Pour représenter les cubes, tu en inscris le nombre que tu surmontes de la lettre* ک *; par exemple, tu écriras trois cubes* $\overset{\text{ک}}{3}$ *et si le cube se répète, tu inscris autant de* ک *qu'il est répété de fois. Si tu as compris ceci, revient à l'exemple relatif à l'explication du mot Jabr, et qui est : cinq Māl quatre Jidhr et trois nombres égalent trois Jidhr, deux Māl et six nombres; ceci s'écrit :*

$$6\ \overset{\text{مـ}}{\overline{2}}\ \overset{\therefore}{3}\llcorner\ \ 3\ \overset{\therefore}{4}\ \overset{\text{مـ}}{\overline{5}}$$

la lettre ل *provient du mot* تعدل *(ta*[c]*dil)* " (traduction de Lamrabet (1994), page 239).

Al-Qatrawāni (XV[ème] siècle)

Témoin et acteur, al-Qatrawāni est Egyptien de formation, mais enseignant à Tunis, il rédige un traité d'arithmétique et d'algèbre, *Rashfat ar-rudhāb min thughūr 'a*[c]*mal al-ḥisāb*, qui décrit les usages des Arabes d'Orient et les compare à ceux d'Occident. Son discours sur la nécessité des radicaux est d'une grande pertinence car, non seulement il justifie l'emploi du symbole *Jim*, mais il le caractérise avec précision : "*Dans certains calculs, on doit préciser la valeur de la racine [carrée d'un nombre], or certains nombres n'en possèdent pas et si l'on calcule la valeur approchée de la racine carrée [de ce type de nombres] et on opère sur les carrés de ces nombres non rationnels, les calculs sont alors défectueux On a donc convenu de placer sur le nombre dont on cherche à calculer la racine la lettre Jim allongée, ainsi :* جـــ *et pour la racine de la racine de ce nombre, deux Jim, ainsi :* $\overset{\text{جـ}}{\text{جـــ}}$, *et autant de fois que le terme Jidhr (racine) se répète, un Jim est ajouté au dessus, car la racine de la racine d'un nombre n'est pas la racine de la racine d'aucun autre nombre*[14]."

Dans le chapitre d'algèbre, voulant calculer le carré d'un polynôme, Al-Qatrawāni commence par présenter ce polynôme sous la forme d'une suite de nombres séparés deux à deux par trois points,

---

" و أعلم أن صورة الأموال ينزل عددها ونمد عليها ميما واحدا، مثل ثلاثة أموال هكذا $\overset{\text{مـ}}{\overline{3}}$ ، و إن كانت أموال أموال فهكذا $\overset{\text{مـ}}{\overset{\text{مـ}}{\overline{3}}}$ ، و إن كانت أموال أموال فهكذا ...، فتضع من الميمات على عدة تكرار اللفظ بالمال ، ونصف مال هكذا (...). وصورة الأشياء تضع عددها وتنزل عليها شينا ممدودة الخط ، و لو اختصرت الشين و وضعت عوضها نقطها لجاز مثل ثلاثة أشياء هكذا $\overset{\text{شـ}}{\overline{3}}$ ، أو هكذا $\overset{\therefore}{3}$ (...) و كذلك الكسور مثل خمسة أسداس شيء و ربع سدس شيء هكذا $\overset{\text{شـ}}{\frac{1\ 5}{4\ 6}}$ ، أو هكذا $\overset{\therefore}{\frac{1\ 5}{4\ 6}}$ ، (...) . و صورة العدد مثلما تقدم من غير تغيير ، و صورة الكعب أن تضع عدد الكعوب و ترسم عليها كافا ، مثل ثلاثة كعوب هكذا $\overset{\text{ک}}{3}$ ... فإذا عرفت ذلك هذا فلنرجع إلى المثال المتقدم الذي بيان معنى المقابلة ، و هو خمسة أموال و أربعة أشياء و ثلاثة من العدد تعدل و مالين و ستة من العدد ، وهذه صورة ذلك $\overset{\text{مـ}}{\overline{5}}\ \overset{\therefore}{4}\ 3\ \ \llcorner\overset{\therefore}{3}\ \overset{\text{مـ}}{\overline{2}}\ 6$، و اللام من لفظة يعدل . "

[14] Citation d'al-Qatrawāni, d'après la pré-édition de Hmida Hedfi:
"لما كان الاحتياج في بعض الأعمال إلى تحقيق الجذر و ليس لكل عدد جذر ، احتاجوا أن يتصرفوا في مربعات تلك الأجذار الغير المنطقة ، فإن أخذ جذرها بالتقريب يفسد أعمالهم ، ثم إنهم اصطلحوا على أن يضعوا على العدد المطلوب جذره جيما مقطوعا هكذا جـ و إن كان المطلوب جذر جذره وضعوا عليه جيمين هكذا $\overset{\text{جـ}}{\text{جـــ}}$ ، و كلما تكرر لفظ الجذر زيد عليه جيم ، فإن جذر جذر كل عدد لا يكون جذر جذر عدد غيره ."(القطرواني ، صفحة 62)

ainsi $2x^2 + 8x + 4$ est représenté par : 2 ∴ 8 ∴ 4 (folio 122). Ces trois points sont en fait des séparateurs qui n'ont pas de valeur ni symbolique ni univoque, puisqu'ils ont déjà servi dans le chapitre sur le calcul des carrés et des cubes des nombres entiers où ils séparent les chiffres. Il y a donc ici une similitude entre la représentation des entiers et celle des polynômes. Cela nous rappelle *les expressions aux images connues* d'as-Samaw'al, les images connues étant les coefficients du polynôme que l'on place sur le *takht* et que l'on recopie par la suite sur le parchemin. Ce qui va différencier, as-Samaw'al d'al-Qatrawāni, c'est le résultat de l'opération : chez le premier, ce résultat figure dans un tableau (*jadwal),* alors qu'al-Qatrawāni présente le polynôme $16 + 64x + 80x^2 + 32x^3 + 4x^4$, sans aucune explication ni justification, sous la forme symbolique (lecture de droite à gauche) :

(folio 122)

Par la suite, et jusqu'à la fin du chapitre d'algèbre, al-Qatrawāni termine chaque calcul en ajoutant au résultat exprimé sous forme rhétorique, l'expression *wa suratuha* (son image est) suivie d'une expression sous forme symbolique.

al-Qalaṣādi (1412-1486)

Il est le plus connu des mathématiciens arabes à avoir expliqué l'usage des symboles maghrébins et à les avoir pratiqués dans ses traités d'algèbre. Commençons par le témoignage.

C'est presque dans les mêmes termes que ceux d'ibn al-Hā'im que l'on retrouve, bien plus tard, une nouvelle référence aux symboles algébriques dans *At-Ṭabsira al-wādhiḥa min masā'il al-'a^cdād al-lā'iḥa* (vers 1443) d'al-Qalaṣādi[15] : "*Ecris l'opération dans un côté de la lawha et place au dessus du Shay le signe Shīn ou trois points, au dessus du Māl le [signe] Mīm, au dessus du Ka^cb le [signe] kaf et ne place rien au dessus du nombre car l'absence de signe est un signe."* (édition de Hedfi, page 105). Noter que l'auteur associe explicitement la symbolique algébrique à l'usage d'une planche à calcul, la *lawḥa*, sur laquelle doivent être effectués les opérations, (il s'agit ici de la somme des deux polynômes $4x + 5x^2 + 4x^3 + 6$ et $6x + 4x^2 + 8x^3 + 8$) .

Lorsque l'on scrute l'œuvre d'al-Qalaṣādi, on découvre qu'à l'exception du signe لا , dans sa fonction d'attribut désignant la négation, aucun signe opératoire ne figure dans son premier traité: *Sharḥ al-Talkhis*, rédigé à Tlemcen, en 1436. Aucune des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication ou division) que ce soit sur les entiers, les fractions, les radicaux ou sur les expressions polynomiales n'est représentée par un symbole. En fait toute opération sur deux nombres (quelle que soit leur nature) sera représentée par l'écriture sur deux lignes de ces deux nombres. Ainsi, les figures suivantes peuvent représenter une somme, une soustraction, un produit ou une division de deux fractions, de deux radicaux ou de deux polynômes, le contexte rhétorique pouvant seul préciser la nature de l'opération :

$\frac{5}{6}$ $\frac{3}{4}$	جـ 8 جـ 2	شـ مـ كـ 5 لا 7 9 كـ مـ شـ 4 لا 6 8
$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{6}$ x $\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}$	$\sqrt{8}+\sqrt{2}$ ou $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{8}$ x $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{8}:\sqrt{2}$	$(9x^3 + 7x^2 - 5x) + (8x + 6x^2 - 4x^3)$ ou $(9x^3 + 7x^2 - 5x) - (8x + 6x^2 - 4x^3)$ ou $(9x^3 + 7x^2 - 5x) . (8x + 6x^2 - 4x^3)$ ou $(9x^3 + 7x^2 - 5x) : (8x + 6x^2 - 4x^3)$

[15] Citation d'al-Qalaṣādi :
" فانزل المسألة في طرف اللوح وضع على الشيء علامة الشين أو ثلاثة نقط و على المال الميم و على الكعب الكاف و لا تضع على العدد شيئا لان ترك العلامة له علامة فيكون ذلك في سطرين."

Il apparaît clairement que l'auteur retranscrit les figures dessinées sur la planche à calcul. Il s'agit ici d'une algèbre syncopée où les symboles illustrent le texte sans lui être indispensables, les calculs effectifs se faisant sur la planche.

Par contre, dans *at-Ṭabṣira al wādhiḥa,* écrite elle aussi à Tlemcen, en 1443, six années après le première œuvre d'al-Qalaṣādi, ainsi que dans les œuvres qui suivent, toutes les opérations sont représentées par un symbole.

Indices externes

Paradoxalement, la première apparition avérée de symboles mathématiques, connue à ce jour, ne figure pas dans un manuscrit arabe, mais dans un manuscrit latin, dont la traduction de l'arabe est attribuée à Gérard de Crémone (vers 1180), et qui fut éditée en 1851 par Boncompagni[16].

Ce texte latin fortement inspiré d'*al-Jabr wal muqābala* d'al-Khwārizmi, est augmenté de quelques vers d'un poème didactique; de plus, les nombres y sont représentés en chiffres arabes, ainsi que certaines fractions. Un paragraphe spécial y est réservé à la représentation des expressions polynomiales sous le titre "*Qualiter figurentur census radices et dragme"* (Comment représenter des carrés, des racines et des drachmes?) (Boncompagni, page 420).

On propose ici de représenter les carrés par la lettre soulignée $\underline{c}$, initiale du mot *census* , les inconnues par la lettre soulignée $\underline{r}$, initiale du mot *radicum* et les constantes par la lettre soulignée $\underline{d}$, initiale du mot *dragme*. Ce paragraphe se termine par l'expression *sic figurentur*, illustrée à la marge par la figure suivante :

2	3	4
$\underline{c}$	$\underline{r}$	$\underline{d}$

Cette figure représente l'expression polynomiale "*duo census, tres radices, 4 dragme"* , ce qui se traduit en symboles modernes : $2x^2 + 3x + 4$.
Un peu plus loin dans ce même manuscrit, on trouve toujours à la marge, la figure :

2	3	4
3	4	5
$\underline{c}$	$\underline{r}$	$\underline{d}$

représentant l'expression polynomiale "*due tercie census, quartas radicis, quatuor quinte unius dragme*" et correspondant à $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$. (Boncompagni, page 421)
La négation[17] est elle-aussi représentée dans ce manuscrit : un point est placé en dessous de la lettre-symbole, ainsi $\underset{\bullet}{\overset{3}{r}}$ veut dire -3x. Les représentations successives suivantes des expressions $2x^2 - 3x$, $2x^2 - 4$, $5x - 3x^2$ et $5x - 4$, se trouvent en marge du folio 73 :

---

[16] Baldassarre Boncompagni, *Della vita et delle opere di Gherardo cremonese*, Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Session du 27 juin 1851). On sait aujourd'hui que le texte rapporté par Boncompani n'a pas été écrit par Gérard de Crémone, mais que c'est "un remaniement de la version III de la traduction d'al-Jabr wal muqābala d'al-Khwārizmi" (Cf. André Allard, in *Histoire des sciences arabes*, Rashed (ed.), tome 2, page 221)
[17] Lorsque en 1848, Boncompagni a communiqué le manuscrit de son article à Chasles, celui-ci lui envoya une lettre de félicitations, insistant sur l'originalité de la notation des nombres négatifs. Nous reproduisons ce passage qui illustre l'état de la connaissance historique au milieu du XIXème siècle :"*La notation des quantités négatives est un fait original qui peut indiquer une source hindoue, et qui est intéressant aussi pour l'histoire de l'algèbre chez les Européens. On pourra s'étonner que cette notation, qui impliquait un principe capital, savoir, la distinction des quantités positives et négatives, tandis que les arabes, comme on le voit notamment par l'algèbre de Mohamed ben Musa et celle de Fibonacci, ne connaissaient que des quantités positives, on pourra s'étonner dis-je, que cette notation n'est porté ses fruits que trois cents ans plus tard.*" (rapporté par Boncompagni, page 436) .

2	2	5	5
c	c	r	r
3	4	2	4
r	d	c	d
.	.	.	.

(Boncompagni, pages 422 et 423).

Nous reviendrons par la suite sur les analogies évidentes qui existent entre cette symbolique et les premiers symboles arabes.

Une autre traduction latine du 12ème siècle d'un manuscrit arabe d'algèbre a attiré aussi notre attention. Il s'agit du *Liber algebrae et almucabola* de Robert de Chester éditée en 1915 par Karpinski (page 126). Ses copies du 15ème siècle contiennent une annexe intitulée "*les règles correspondant aux six chapitres de l'algèbre*", dans lesquelles figurent les symboles ʒ à la place de *substancia* (traduction de *māl*), υ à la place de *radix* (traduction de *jidhr*) et ø à la place de dragme (traduction de *dirham*), ainsi que 7 pour l'addition, symboles qui préfigurent ceux utilisés par la suite par les cossistes allemands tels que Rudolf (en 1525)[18].

Nous ne pouvons pas enfin ne pas évoquer Fibonacci, dont la formation initiale s'est faite à Béjaia et dans les pays musulmans et qui rédige en 1202 son *Liber abacci* dans lequel les nombres entiers et les fractions sont représentés de la même manière qu'au Maghreb.

Hypothèses

Première hypothèse : l'algèbre symbolique est un chapitre de l'arithmétique indienne maghrébine

Nous savons que le premier traité connu d'algèbre arabe est celui d'al-Khwārizmi et que, bien que n'utilisant que des quantités, c'est-à-dire des nombres positifs, naturels ou rationnels et parfois irrationnels, il est complètement rhétorique, ne contenant aucun symbole que ce soit pour les nombres, les fractions ou pour l'inconnue et ses puissances. Héritiers et continuateurs d'al-Khwārizmi, Abu Kāmil, puis al-Karāji vont aider à consacrer l'algèbre comme une science autonome, mais leurs exposés restent eux aussi complètement rhétoriques. Pour Saydan[19] (1985), cette tradition vient du fait que l'algèbre était considérée comme un chapitre du *ḥisāb al-hawā'i*, calcul des transactions, basé essentiellement sur le calcul mental, en vogue chez les scribes et les calculateurs institutionnels appelés à résoudre les problèmes de la vie courante et popularisé par les spécialistes des partages successoraux. En Andalousie et au Maghreb, nous retrouvons les spécialistes de l'algèbre rhétorique et du droit successoral, disciples d'al-Khwārizmi et d'Abu-Kāmil ; leur représentant le plus éminent sera Ibn al-Bannā, avec son *Talkhīs* et son *Sharḥ al-talkhīs.*

Avec l'adoption par certains mathématiciens arabes de la numération indienne décimale de position (*al-ḥisāb al-hindī*), une nouvelle catégorie de spécialistes est née. Même Al-Khwārizmi en faisait partie, puisqu'il écrivit l'un des premiers condensés d'arithmétique indienne[20], introduisant dix signes pour exprimer les chiffres et en particulier le chiffre zéro. Les spécialistes du *ḥisāb al-hindī* montrèrent l'efficacité de cette nouvelle arithmétique utilisant des algorithmes spécifiques évitant le recours à la mémoire et permettant d'effectuer des calculs rapides sur des nombres petits ou grands.

A la lecture de la biobibliographie de l'Andalousie de *Ṣaᶜad al-Andalusi* (1029-1070), nous constatons que l'arithmétique indienne y était bien connue grâce à la diffusion du traité d'arithmétique indienne d'al-Khwārizmi. "*Parmi ce qui nous est parvenu de leur science des nombres, ḥisāb al-ghubār qu'al-Khwārizmi a simplifié ; c'est l'arithmétique la plus concise, la plus succincte, la plus*

[18] Barnabas B. Hughes, (page 19)
[19] Saydan A.S., *Tarīkh* ..., page 611.
[20] Ce traité semble avoir été écrit bien après celui d'algèbre. On ne le connaît qu'à travers des traductions latines, sa version arabe n'ayant jamais été retrouvée.

facile à acquérir, la plus aisée à apprendre et dont la construction est la plus originale ; elle atteste chez les Indiens un esprit pénétrant, un beau talent de création et la supériorité de discernement et de génie inventif[21]*."*

Au Maghreb et plus précisément à Kairouan, l'arithmétique indienne a suscité, dès le 10ème siècle, la rédaction d'un traité, *Kitab fil-ḥisāb al-hindī,* qui lui était entièrement dévolu, rédigé par le mathématicien, astronome et médecin *Dunash ibn Tamīm*, *Abu Sahl* (900-960).

Mais l'apport incontestable le plus remarquable est *al-Bayān wat-tudhkār fi ᶜilm masā'il al-ghubār* écrit vers la fin du 12ème siècle au Maroc par Abu Bakr al-Hassār: l'arithmétique d'origine indienne y est présentée méthodiquement, la numération décimale de position clairement décrite, les opérations sur les nombres entiers illustrées dans des fenêtres spécifiques; une typologie extrêmement détaillée de symboles spécifiques pour les fractions y est exposée pour la première fois dans la littérature arabe, et les différentes opérations possibles sur ces fractions sont présentées.

La consultation du *Liber abacci* de Fibonacci, complété en 1202 et fortement inspiré de l'arithmétique maghrébine, et la lecture des traités maghrébins du 14ème siècle et bien plus tard, l'étude du *Kashf al-asrār ᶜan ᶜilm ḥurūf al-ghubār* d'al-Qalaṣādi (15ème siècle) nous confirment dans cette hypothèse. Tous commencent par introduire l'arithmétique indienne: numération, opérations sur les entiers, notation des fractions, puis calculs sur les radicaux et enfin un chapitre d'algèbre et tous utilisent la représentation maghrébine des fractions, le *Kashf al-asrār* employant abondamment les symboles algébriques.

On comprend que le terrain fut propice au développement d'une symbolique pour l'algèbre; l'usage des chiffres arabo-indiens et l'intégration du double héritage arithmétique et algébrique d'al-Khwārizmi semblent avoir favorisé la naissance d'abord de symboles pour l'arithmétique des fractions, puis celle des radicaux et enfin celle de l'inconnue et de ses puissances.

Une question d'ordre épistémologique reste posée : elle concerne l'éclipse apparente des symboles algébriques dans les traités maghrébins du 13ème siècle, en particulier chez ibn al-Bannā. Ahmed Djebbar[22], interprétant le fameux passage de la *Muqaddima* d'Ibn Khaldūn, pense que la réaction d'ibn al-Bannā est une réaction "traditionaliste" face à l'excès de symbolisme des traités précédents et il ajoute que l'absence des symboles peut être aussi "*cherchée soit dans le statut de ce nouveau langage, soit dans les conceptions en vigueur à l'époque pour la rédaction d'ouvrages scientifiques*"[23]. L'avis, d'al-Muwaḥḥidi, mentionné plus haut, insistant sur l'utilisation des chiffres *ghubār* "*malgré le fait qu'ils soient non arabes (aᶜjam); car pour moi, la clarté est louable à chaque instant, quel que soit le langage employé"* pourrait conforter ce point de vue. Quant à al-Qalaṣādi, qui tout en s'insurgeant contre *"l'hermétisme de l'expression de certains commentateurs qui se contentent du symbole et du signe*"[24], il ne rechigne pas à illustrer ses traités par des symboles algébriques.

Nous pensons, quant à nous, que l'analyse de cette éclipse devrait faire l'objet de travaux complémentaires et nous suggérons que l'absence de symboles dans les traités du treizième siècle n'était pas due à des choix délibérés, mais, suivant en cela une autre suggestion de Djebbar[25], qui nous semble plus pertinente, qu'elle résulte du rôle joué par la planche à calculer et à la maîtrise de son utilisation. C'est ce que nous allons détailler dans le paragraphe suivant.

Deuxième hypothèse : le rôle de la planche à calcul

Dès son introduction dans les mathématiques arabes, la numération et l'arithmétique indiennes furent associées au *takht*, planche recouverte de sable sur laquelle étaient effectués tous les calculs. Saydan (1978) nous a rapporté le témoignage d'al-Uqlīdisi, qui a écrit en 952 à Damas: *Kitāb al-fusūl fi-l-ḥisāb al-hindī*. Al-Uqlīdisi indique dans l'introduction de son ouvrage qu'il a tenté d'inclure dans son arithmétique indienne toute l'arithmétique connue de ses contemporains, qu'elle soit d'origine indienne, grecque (*rūmi*) ou arabe. Il justifie l'emploi universel des chiffres indiens car c'est « *plus facile, plus rapide et nécessite peu de précautions (...), et en particulier moins d'efforts de*

[21] Saᶜad al-Andalusi, *Tabakāt al-Umam*, page 58.
[22] Ahmed Djebbar, *Thèse* ..., page 93
[23] *ibid*, page 94.
[24] *ibid*, notes n°97 et 98, page 120.
[25] *ibid*, page 94.

mémorisation ». Il associe, d'une manière explicite, le calcul indien à l'usage de la planche à calculer (*takht*) et en énumère les avantages et les inconvénients :

Avantages :

1) Le calculateur peut abandonner son calcul à tout moment puis revenir sans perturber les résultats.
2) Le coût du *takht* est peu élevé.
3) Son usage est aisé et les résultats sont rapidement obtenus.

Inconvénients :

1) L'usage de la planche à calculer évoque les scribes qui l'emploient et rappelle surtout la caste des astrologues ambulants qui exercent leur art au coin des rues et sur la place du marché.
2) Les mains se salissent à cause du sable qu'on doit balayer pour effacer la planche et les doigts peuvent se blesser.

Pour éviter les inconvénients de la planche à calcul, Al-Uqlīdisi indique qu'on peut s'en passer et n'utiliser que le papier et l'encre, c'est-à-dire des algorithmes qui ne nécessitent pas d'effacer les opérations intermédiaires.

Les algébristes arabes d'Orient, tels al-Karāji ou as-Samaw'al, utilisent le *takht* pour effectuer des opérations sur les expressions algébriques, analogues à celles qu'on pratique sur les nombres entiers. *Les expressions aux images connues* (c'est-à-dire en termes modernes, les expressions algébriques) sont représentées dans des tableaux, copies de ce qui se passe sur le *takht.* Par ailleurs, les algébristes géomètres, tels Omar al-Khayyām ou Sharaf ad-Dīn at-Tūsi, signalent eux-aussi l'utilisation de la planche à sable chaque fois qu'ils sont amenés à effectuer des calculs numériques pour approcher les solutions des équations du troisième degré.

L'usage de la planche à sable par les mathématiciens d'Occident est attestée depuis le 10ème siècle d'abord par le nom même donné à l'arithmétique indienne : "*Ḥisāb al ghubār*" , faisant référence au sable que l'on étend sur la planche pour y effectuer les calculs. Dans son *Kitāb al-kāmil fi sinā^cat al-'a^cdād*, le mathématicien de Sebta Abu Bakr al-Ḥassār (vers 1175) consacre un important paragraphe à la planche à calculer. "*Dans nos contrées,* écrit-il, *les calculateurs, les artisans et surtout les scribes ont pris l'habitude d'utiliser des chiffres qu'ils ont convenu entre eux leur permettant d'exprimer les nombres et de les différencier les uns des autres. C'est une écriture comme le reste des écritures, tels que l'hébreu, le latin ou l'hamirite ou d'autres chiffres utilisés comme écritures. Elle est, chez eux, de deux sortes : la première est appelée ghubār ou encore hindī. Ils lui ont donné ce nom parce qu'à l'origine ils utilisaient une planche (lawḥa) en bois sur laquelle ils étendaient un sable fin. L'apprenti calculateur prend alors un petit bâton ayant la forme d'un stylet qu'il utilise pour dessiner ces chiffres sur le sable et il effectue les calculs qu'il souhaite. Lorsqu'il a terminé son calcul, il essuie le sable et le range. L'efficacité [de cette méthode] est [de permettre] d'exécuter les calculs et de les faciliter sans qu'il n'ait point besoin tout le temps d'encre, de planche et d'effacement; ils ont utilisé le sable à la place de l'encre et ont constaté que cela facilitait les calculs …*" (*al-Kāmil* d'al-Ḥassār, page 6).

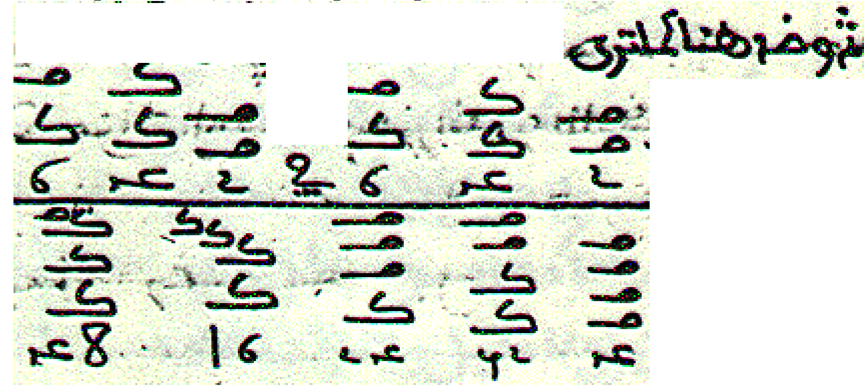
D'autres mathématiciens maghrébins évoquent eux aussi la planche à sable d'origine indienne : ibn al-Yāsamīn dans *Talqīḥ al-afkār*, et Ibn al-Mun^cim (m. en 1228) dans *Fikh al-ḥisāb*. Ce dernier utilise une *lawḥa* lorsqu'il calcule la racine cinquième d'un nombre. "*Conserve ce nombre inscrit au bord de la planche ..."* (Lamrabet, page 208).

Le paragraphe d'al-Ḥassār, que nous venons de citer, suggère deux types de planches, la première est une planche à sable sur laquelle on dessine des chiffres que l'on peut effacer en jetant le sable, alors que la seconde est une planche sur laquelle on écrit à l'encre avec un stylet. Pour Lamrabet, c'est cette deuxième planche qu'utilise al-Qatrawāni (14ème siècle) pour extraire la racine cubique d'un nombre; ce serait la planche à argile molle, dont l'usage s'est perpétué, dans nos pays, jusqu'à milieu du 20ème siècle.

Nous avons vu plus haut qu'al-Qalaṣādi se réfère explicitement à une *lawḥa* en introduisant les symboles algébriques et en représentant les opérations sur les expressions polynomiales. En fait, cette référence à la *lawha* se trouvait déjà dans un autre traité du même auteur écrit quelques années plus

tôt: *Sharḥ talkhīs 'aᶜmāl al-ḥisāb* (vers 1436), dans lequel il demande : "*Multiplie les trois Māl par les six Māl, tu trouves dix-huit Māl Māl que tu gardes dans un coin de la lawḥa*"[26].

Enfin, dans *Bughyat at-Tullāb* (1483), Ibn Ghāzi propose "*un exemple inédit dont les opérations nécessaires ont été effectuées sur des planches (à calcul), puis représentées ici comme tu le vois*"[27].



Ce texte illustre le produit de deux polynômes écrits en symboles algébriques :
$2x^4 + 4x^6 + 6x^5$ par $2x^4 + 4x^6 + 6x^5$.
Ibn Ghāzi donne le résultat $4x^8 + 52x^{10} + 24x^9 + 16x^{12} + 48x^{11}$.

Bien que fragmentaires, les exemples que nous venons de citer montrent clairement que les Maghrébins avaient un usage persistant d'une planche à calcul, en conjonction avec l'usage des représentations symboliques des nombres, des fractions, des radicaux, des expressions polynomiales et des équations. C'est ce qui explique l'emploi général et répété de l'expression و هذه صورتها (*Wa hādhihi sūratuha* = ceci est sa représentation) chaque fois qu'un nombre connu ou inconnu ou qu'une expression algébrique est représentée en écriture symbolique. Nous pensons que les algébristes devaient avoir recours à un outil de calcul, peut-être la planche à sable (*takht*), mais certainement la planche à argile molle (*lawha*) pour les raisons suivantes :

- L'absence, souvent constatée dans les traités maghrébins, de calculs intermédiaires.
- Le fait que seuls les données initiales et les résultats finaux recopiés tels quels figurent souvent explicitement dans les textes sous leur forme symbolique.
- L'absence de toute rature ou de traces d'erreurs corrigées.

En guise de conclusion

A la question initiale concernant l'origine des symboles algébriques, nous avions isolé quelques indices en faveur d'une origine andalouse : Le premier est que les mathématiciens auxquels sont associés des symboles mathématiques, tels al-Ḥassār ou ibn al-Yāsamīn sont nés en Andalousie et y ont reçu leur éducation, avant de s'installer au Maghreb. Le deuxième indice est constitué par les symboles mathématiques signalés dans les premières traductions latines par Robert de Chester ou par Gérard de Cremone de traités arabes d'algèbre. Cependant, ne connaissant aujourd'hui aucun traité andalou dédié explicitement au *ḥisāb al-ghubār* et ne trouvant aucune trace de symboles dans les autres traités d'algèbre, nous pouvons exclure l'origine andalouse.

A contrario, la multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne nous confirme dans l'hypothèse d'une origine andalouse des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme dernier chapitre des traités de *ḥisāb al-ghubār*.

[26] Citation d'al-Qalaṣādi, d'après l'édition de Farès Bentaleb : note 38 de la page 272 :
"اضرب الثلاثة أموال في الستة أموال بثمانية عشر أموال ما ل أحفظها في طرف اللوح"

[27] Ce que nous reproduisons ci-dessus appartient à une copie antérieure à celle éditée par Souissi qui ne la reproduit pas bien qu' Ibn Ghāzi s'y réfère explicitement :
"وهذا مثال منه بديع جمع في ألواح ما يحتاج منه الجمع ثم وضع منه هنا كما ترى " (صفحة 305)

Le contexte historique conforte aussi l'hypothèse maghrébine; en effet, les symboles mathématiques sont apparus vers le milieu du 12ème siècle, or cela correspond à la prise du pouvoir politique en 1147 par le mouvement Almohāde et à l'émergence de Marrakech comme sa capitale culturelle et scientifique. Ce qui a entraîné une migration des élites intellectuelles andalouses vers Marrakech, Sebta (Ceuta), Béjaia (Bougie) et Tunis. On retrouve, comme enseignants renommés, les mathématiciens cités plus haut : al-Ḥassār à Sebta ou ibn al-Yāsamīn à Marrakech. Il est remarquable que les mathématiciens du 14ème siècle connus pour avoir utilisé les symboles algébriques, tel ibn Qunfudh (1339-1407), ont longuement été en contact avec l'école marocaine de mathématiques que ce soit à Marrakech, à Fès ou à Sebta. Est-ce que cela veut dire que les symboles algébriques étaient d'un usage courant à Marrakech? Nous ne pouvons l'affirmer avec certitude, mais la lecture des œuvres algébriques maghrébines du 14ème siècle a montré une utilisation quasi systématique et quasi uniforme de ces notations, les symboles maghrébins s'étant pérennisés une fois leur transfert aux parchemins accompli, c'est-à-dire vers la fin du 14ème siècle.

Nous utiliserons désormais l'expression *symboles algébriques maghrébins* comme l'a proposé Ahmed Djebbar.

2ème Partie : Le manuscrit de Jerba

2 . 1 Présentation du manuscrit

Le manuscrit de Jerba est une copie du *Sharḥ al-urjūza al-yāsminiya fil jabr wal muqābala,* rédigé en 789H = 1380 par Ibn al-Hā'im[28]. Le *Sharḥ al-urjūza* lui-même[29] est quasi rhétorique; il ne contient ni chiffres, ni représentations symboliques de fractions, de radicaux ou d'expressions algébriques[30] .

Le colophon du manuscrit de Jerba précise le nom du copiste Muhammaad Hamoud al-Bāz at-Tunūsi*,* ainsi que le lieu et la date du manuscrit (achevé à Costantiniya - l'autre nom d'Istambūl - au mois de *rabii I* de l'année 1157 H qui correspond à 1747). L'écriture est de type maghrébin, claire et lisible. On doit à ce même copiste trois autres textes recopiés la même année à Costantiniya et regroupés dans un même recueil :

- *Ar-risāla al-Bahāiya fil ḥisāb* de Bahā Eddine al-Amili[31] (recopié fin *rabii II*, 1157 H)
- *Hāshyat Jalā Zādeh 'alā al-Bahāiya fil ḥisāb,* un commentaire au texte précédent écrit par Omar ibn Ahmad al-Mā'i (as-Shilli)[32]. (recopié fin *jumāda I*, 1157 H). Bien que recopiés après le *Sharḥ al-urjūza* d'Ibn al-Hā'im, ces deux textes le précèdent dans le recueil.
- Le recueil se termine par un court commentaire d'Ibn Majdi sur le *Sharḥ al-urjūza*. Le copiste précise l'avoir reproduit à partir d'une copie écrite de la main d'Ibrāhim al-Halabi, lequel continuait à cette époque d'enseigner.

Les quatre textes de ce recueil contiennent dans leur marge (*al-ḥāshya)* des commentaires sur le texte central et très souvent une traduction en symboles mathématiques maghrébins de presque toutes les expressions numériques ou algébriques intervenant dans le texte central. Nous nous contenterons d'étudier la marge, particulièrement intéressante, du *Sharḥ al-urjūza* , d'autant plus que, d'après son propre témoignage, elle a été recopiée par Muhammad al-Bāz avant les autres textes.

Ce recueil de traités d'algèbre fait partie de l'importante bibliothèque de manuscrits de la famille al-Bāssi de Houmet as-Souk à Jerba, portant sur les sciences religieuses, mais aussi sur les sciences profanes, notamment la grammaire et les mathématiques[33].

---

[28] Le *Sharḥ al-urjūza* d'ibn al-Hā'im est l'un des plus anciens commentaires connus aujourd'hui du poème d'ibn al-Yāsamīn. Il y cite al-Khwārizmi, Abu Kāmil, *Kitāb al-Fakhri* ainsi qu'al-Badi[c] d'al-Karāji. Il recommande la lecture des *Usūl* d'ibn al-Bannā et de son *Talkhīs*, auxquels il se réfère parfois. Il montre souvent l'intérêt qu'il porte aux mathématiques andalouses et maghrébines.
Outre le *Sharḥ al-urjūza,* ibn al-Hā'im est l'auteur de plusieurs traités de calcul et d'algèbre: *al-Wasila fil ḥisāb , al-Maūna fi ḥisāb al-hawā , al-Lama[c]a fil ḥisāb* etc. On retrouve encore aujourd'hui de nombreuses copies de toutes ces œuvres, en particulier à la Bibliothèque nationale de Tunis.

[29] Le texte du *Sharḥ al-urjūza* est constitué de 80 folios recto-verso. Il est composé
- d'une présentation expliquant l'objet de ce traité, suivie d'une introduction définissant les termes utilisés dans le texte.
- d'une première partie traitant des opérations sur les inconnues (produit, division, somme et soustraction),
- d'une deuxième partie traitant des six types d'équations classiques,
- d'une troisième partie montrant comment ramener les problèmes à ces six types d'équations,
- d'une conclusion traitant de problèmes divers auxquels il faut apprendre à répondre rapidement et avec précision.

Mon collègue Hmida Hedfi donnera présentera, au cours de ce colloque, dans une autre communication, une description plus détaillée de ce texte d'ibn al-Hā'im.

[30] En effet, la seule exception se trouve au recto du folio 54, où un tableau annoncé dans le texte donne les dix premiers termes de séries arithmétiques et géométriques, les nombres étant écrits en chiffres arabes d'Orient.

[31] Ce texte a été édité par Jalal Shawki (1981).

[32] Shawki en signale plusieurs copies. (page 19, n°7)

[33] Le fond de la famille al-Bāssi à Jerba contient, outre deux copies du *Sharḥ al-urjūza*, des traités d'al-Qalasādi, d'Ibn Ghāzi, de Sibt al-Māridini, de Bahā ad-Din al-[c]Amili et plusieurs traités de *Farā'idh* contenant souvent un important chapitre sur les fractions.

La marge du manuscrit de Jerba

De nombreuses questions se posent concernant la marge du manuscrit. Qui en est l'auteur ? Est-ce le scribe, dont le nom apparaît dans le colophon, ou est-ce quelqu'un d'autre ? D'autres personnes ont-elle ajouté leurs commentaires à la marge ? Qu'aurait pu être le niveau de formation en mathématiques de l'auteur de la marge ?
Quel rôle a-t-on fait jouer à la marge ? Est-ce un aide-mémoire ? Un brouillon ? Des notes prises pendant une leçon ?

Après une inspection détaillée, nous pensons que les textes des marges de tout le recueil sont d'une même écriture maghrébine claire et bien lisible, sans ratures ni ajouts. Bien que de tailles plus petites que celles du texte central, les lettres et le style utilisés dans la marge sont identiques et semblent donc être écrits, à deux moments distincts, par une même personne qui aurait commencé par recopier le texte du *Sharh*, aurait relu et vérifié sa copie comme en témoignent quelques ajouts bien signalés[34], puis elle aurait commenté à la marge le texte central, puis traduit toutes les expressions algébriques en symboles mathématiques maghrébins.

Dès la page de garde, on retrouve la fameuse citation extraite des *Prolégomènes* d'ibn Khaldūn : « *Il nous est parvenu que certain maître mathématicien d'Orient a complété plus de vingt types d'équations et leur a trouvé une solution sures en utilisant des preuves géométriques* »[35] (Voir aussi la traduction de ce passage par Vincent Monteil, tome 3, page 1057).

Par la suite et à la marge des premières pages, le copiste ajoute dans tous les sens, en diagonale ou en écriture verticale du bas vers le haut ou du haut vers le bas, des textes plus ou moins longs contenant des commentaires sur des opinions avancées par ibn Hā'im. Ces commentaires sont souvent introduits par le terme *Qawluhu* suivi d'une expression extraite du texte central, elle-même suivie d'une explication. Ces commentaires à la marge sont assez précis; ils montrent que le rédacteur a une bonne connaissance de l'algèbre et de ses nuances, se référant aux œuvres de nombreux algébristes : Euclide, al-Khwārizmi, Abu Kāmil, al-Karāji, ibn al-Yāsamīn, ibn al-Bannā, Yahya al-Kāshi, Sibt al-Māridini, Ibn al-Majdi.

Dès que l'auteur de la marge pense devoir attirer l'attention du lecteur sur un point délicat, il termine sa remarque par *ta'ammal* (Réfléchis !). Ainsi, en 7b, il ajoute « *Je ne vois pas d'inconvénient à ce que …. Réfléchis !* ». En 12b, il ajoute en marge : « *Cette proposition a été démontrée par Euclide dans la proposition 6 du livre II* », alors qu'en 15b, il se réfère à la proposition II-5 d'Euclide. Ailleurs, en 19a et en 19b, il énonce dans la marge deux propositions euclidiennes auxquelles ibn al-Ha'im fait allusion dans le texte central. En marge inférieure de 50a, le commentateur remarque une erreur de calcul dans le texte d'ibn al-Hā'im et en explique l'origine. En marge droite de 67a, le copiste signale une deuxième copie de ce même traité d'ibn al-Ha'im, et développe la solution d'un problème dont l'énoncé serait dans la seconde copie.

Les éléments précis, qui suivent, nous confirment dans l'hypothèse que l'auteur de la marge est bien l'auteur des écritures symboliques et que c'est bien Muhammad Hamūd al-Bāz at-Tūnusi :

1. La courte note, en marge du folio 5a, retient l'attention : Elle commence par *Qultu* et continue « *J'ai dit* que *c'est ce que déclare Quṯb ad-Dīn, auteur de Sharḥ ash-Shamsiya. Muhammad al-Bāz à al-Kurdi* »[36]. Cette note semble être une signature de l'auteur des marges, elle

---

[34] Ces corrections sont rares mais aisément identifiables; nous les avons retrouvées dans le corps du texte dans d'autres copies du *Sharḥ*.
[35] Texte arabe, folio 1a :
« قال ابن خلدون رحمه الله تعالى في المقدمة وقد بلغنا ان بعض أئمة التعاليم من أهل المشرق أنهى المعادلات فوق العشرين واستخرج لها أعمالا وثيقة ببراهين هندسية »
[36] Texte de la marge, folio 5a

confirme l'hypothèse que ce serait le copiste lui-même. La seule incertitude, ici, porte sur l'expression "à *al-Kurdi*" ; nous ne sommes pas encore arrivés à en comprendre le sens.

2. Il y a continuité entre certains commentaires et la résolution symbolique qui le suit immédiatement, comme c'est le cas dans la marge droite du folio 47b.
3. Quant à la marge gauche de 47b, une longue note explicative sur la manipulation de l'expression algébrique complexe $(10/x^2 - x) : (3x/x^2 - 10)$ se termine par « *Li Sadok Mustafa Afandi* ».
4. De même, commentant une autre remarque du texte central concernant le problème de l'achat d'un cheval par trois personnes, une autre note écrite dans la marge supérieure du folio 76b, se réfère à « *notre professeur Sidki Mustafa Afandi* » et se termine par la phrase : « *et ceci est la représentation [de la solution du problème] reproduite à partir de l'écriture d'Ibrahim Afandi* »[37] , suivie de la résolution du problème en symboles maghrébins.
5. La copie de Jerba, que nous étudions, est suivie immédiatement d'un court texte intitulé *Mas'ala* (Problème) au sujet de laquelle le copiste précise qu'il ne s'agit pas de l'un des problèmes du traité d'ibn al-Hā'im, mais d'une question « *originale proposée par notre maître Sidki Mustapha Afandi* » [38]. Le problème en question consiste à résoudre une équation bicarrée de la forme $x^4 + 100 = 25x^2$ et dont les solutions sont $\sqrt{5}$ et $\sqrt{20}$. Le problème est alors complètement traité en écriture symbolique maghrébine sans recours à une explication rhétorique (folio 81b).
6. Sur le même folio et immédiatement après ce problème énoncé et résolu, le copiste cite longuement *Ḥāwi al-Lubāb* du mathématicien égyptien Ibn al-Majdi qui commente le *Sharḥ al-urjūza* d'Ibn al-Hā'im et la manière de résoudre le dernier problème du *Sharḥ.* Le colophon de ce commentaire, folio 83b, indique qu'il a été recopié à partir d'un texte rédigé par Ibrāhim al-Ḥalabi, enseignant encore en vie et dont l'œuvre est encore florissante.
7. Nous avons découvert dans le catalogue des manuscrits de *Maktabt al-'awkāf al-islāmiya,* à Alep (en Syrie), les références à un autre manuscrit (n° 1785) du *Sharḥ al-urjūza* d'Ibn al-Hā'im, datant de 1733, c'est-à-dire onze ans plus tôt que notre manuscrit. Son copiste s'appelle Sidki Mustafa ibn Salah ibn Kacem.

Pour conclure ce paragraphe, nous pouvons affirmer, à partir des éléments rassemblés ci-dessus, que le copiste Muhammad Ḥamūd al-Bāz at-Tūnusi a bien rédigé les notes en marge, à la fois les commentaires totalement rhétoriques et la traduction en symboles mathématiques maghrébins des expressions algébriques, dénotant ainsi d'une compétence mathématique certaine allant bien au-delà des connaissances d'un étudiant débutant en algèbre. Muhammad al-Bāz at-Tūnusi suit, à Istambul les enseignements de Sidki Mustafa ibn Salah ibn Kacem et consulte un manuscrit rédigé par un autre enseignant Ibrāhim al-Ḥalabi, lui-même utilisant les symboles algébriques maghrébins.

" قلت، قد صرح بهذا قطب الدين ، شارح الشمسية ؛ محمد الباز في الكردي " (حاشية صفحة ٥ أ)

[37] Texte de la note marginale, folio 70b:

"وهذه صورته منقولة من خط إبراهيم أفندي" (حاشية صفحة ٧٠ ب)

[38] Texte de la note marginale, folio 81b:

"مسألة ليست من مسائل الكتاب من مبتكرات أستاذنا صدقي مصطفى أفندي " (حاشية صفحة ٨١ ب)

2 . 2 Analyse des symboles du manuscrit de Jerba

Lorsqu'on analyse les signes utilisés dans une écriture symbolique donnée, on s'intéresse à leur caractéristiques, à savoir : leur matérialité, c'est-à-dire

- leurs attributs physiques et formes graphiques,
- la syntaxe combinatoire régissant les règles d'utilisation,
- leur signification.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'analyser les symboles maghrébins à partir de leur utilisation dans le manuscrit de Jerba.

2.2.1 . Les attributs physiques des symboles maghrébins

Les signes utilisés par les Maghrébins sont tous constitués de lettres de l'alphabet arabe. Certains se réduisent à une seule lettre, abréviation du terme représenté, souvent sa première lettre, comme c'est le cas de ع pour عدد (^{c}*Adad* = nombre), de ش pour شيء (*Shay* = chose)[39], de م pour مال (*Māl* = carré), de ك pour كعب (*Kaāb* = cube), de ج pour جذر (*Jidhr* = racine carrée), ou sa dernière lettre comme ل pour يعدل (*Y'aādil* = est égal).

L'équation $10x^2 - 20 = 20$ est représentée ci-dessous, (lecture de droite à gauche)[40]

(26b)[41]

et ci-dessous, la représentation du polynôme $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$:

(63b)

Lorsque le terme lui-même n'est constitué que d'une, de deux ou exceptionnellement de trois lettres, il peut être considéré comme un symbole : c'est le cas de في (*Fi* = multiplié par), من (*Min* = soustrait de), الى (*Ilā* = ajouté à), على (^{c}*Alā* = divisé par), و (*Wāw* = plus)[42] et لا (*Illa* = moins)[43].

	$\frac{5}{7}x \cdot 4x^2$		$\frac{1}{6}x$ soustrait de 10		10x ajouté à 60x
	$10x : 2x^2$		$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})x^2$		$10x^2 - 20$

[39] On trouve aussi dans de nombreux manuscrits maghrébins le symbole ∴ constitué de trois points pour représenter *Shay* (la chose).

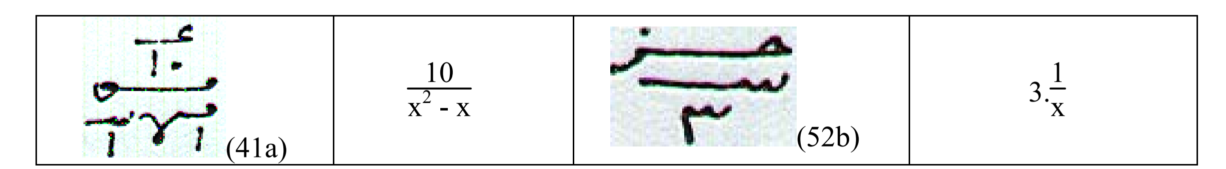
[40] La numération arabo – indienne utilisée dans le manuscrit de Jerba est celle d'Orient : ١ ٢ ٣ ۴ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

[41] Les références entre parenthèses renvoient aux folios du manuscrit de Jerba.

[42] On trouve aussi dans d'autres manuscrits le symbole ∴ pour représenter l'addition.

[43] On trouve aussi الا comme signe de la négation. C'est d'ailleurs l'un des rares signes que l'on retrouve en Orient. Ainsi, chez as-Samaw'al, c'est l'attribut des coefficients négatifs (^{c}*adad nāqis*), mais aussi chez al-Kāshi lorsque il soustrait une fraction d'une autre fraction : $\frac{\dot{1}}{4}$ الا $\frac{\dot{1}}{3}$, qu'on lirait aujourd'hui $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

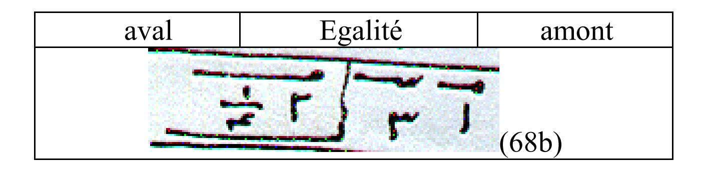
Enfin, certains signes sont l'abréviation des deux premières consonnes du terme représenté; comme مـــق pour مقـسـوم (*Maqsūm* = divisé)[44] , جز pour جزء (Juz'u = une part de)



(41a)	$\frac{10}{x^2 - x}$	(52b)	$3.\frac{1}{x}$

Le signe de l'égalité

Dès sa première apparition, l'écriture symbolique maghrébine utilise le symbole ل (*lām* = L)[45] , dernière lettre de يعدل (*Ya*ᶜ*dilu* = est égal à) comme signe de l'égalité[46].

aval	Egalité	amont
 (68b)		

Le but premier de l'algébriste arabe est de transformer ces expressions pour les ramener à l'une des six équations canoniques, son utilisation du symbole d'égalité n'est jamais ambiguë : tout ce qui le précède fait partie de la place en amont et tout ce qui suit fait partie de la place en aval. Rappelons que, particulièrement depuis al-Karāji, les mathématiciens arabes considèrent "*qu'opérer sur les inconnues permet de les garder dans leur champ; cela veut dire [que l'inconnue] reste toujours inconnue tant qu'elle ne figure pas dans une équation*"[47] (*al-Badi*ᶜ, édition de Adel Anbouba, p.47).

Le symbole de l'égalité possède deux places, l'une en amont et l'autre en aval, (de droite à gauche), indistinctement occupées par des nombres ou des expressions algébriques[48].

---

[44] Dans de nombreux manuscrits maghrébins, la division est notée ـــق au lieu de مـــق . C'est ce que l'on trouve chez Ibn Ghāzi comme on le voit dans *Bughyat at-Tullāb*, page 309 de l'édition arabe de Mohamed Souissi.

[45] al-ᶜUqbāni l'appelle : لام المعادلة (*le lām de l'égalité*). (Thèse de Anissa Harbili, page 381)

[46] Tout en adhérant à la remarque de Serfati affirmant que :" *l'invention d'un signe d'égalité est un élément décisif de la constitution d'une écriture mathématique autonome, séparée de la langue naturelle*", nous pensons que cela s'applique non seulement à l'écriture symbolique, mais aussi à la forme stéréotypée de l'écriture rhétorique algébrique. Signalons que Serfati ignore complètement le signe d'égalité maghrébin, mais analyse en détail celui de Robert Recorde (1557).

[47] Citation d'al-Badiᶜ d'al-Karāji:
" اعلم أن التصرف في المعلومات بأنواع التصرف يحفظها في حدها، و كذلك المجهول يحفظ نفسه في حده عند التصرف فيه. ومعنى ذلك أن يكون أبدا مجهولا ما لم يقابل " (البديع في الحساب للكرجي ، صفحة 47)

[48] Après avoir défini le concept d'équation et l'avoir illustré avec la représentation 6 2 3 ⌋ 3 4 5 , Ibn Qunfudh justifie l'emploi du signe ـل pour l'égalité et ajoute: "*la place qui précède ou suit ce signe n'a pas d'importance. Si tu dis ...* 3 4 5 ⌋ 6 2 3 *, cela revient exactement à la première [représentation].*" (édition Youssef Guergour, page 167).

2.2.2 La syntaxe des symboles maghrébins

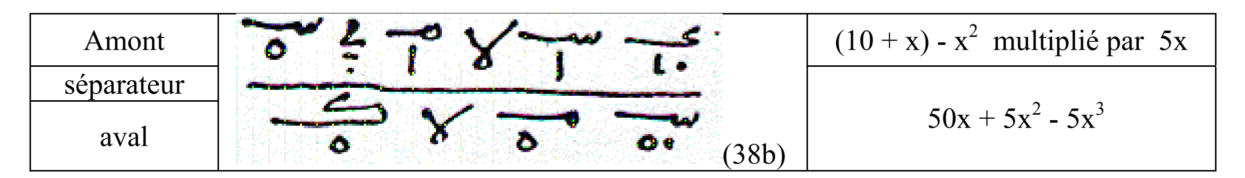
Construite à partir d'exemples génériques, la symbolique maghrébine utilise des séparateurs[49] et des assembleurs[50] à une ou deux places.

A . Les séparateurs

Un séparateur est un signe utilisé pour séparer deux expressions algébriques, la seconde de ces expressions étant obtenue à partir de la première, suite à une transformation. On caractérise ainsi le séparateur par la place en amont, le séparateur lui même et la place en aval. Dans sa forme autonome, l'écriture symbolique maghrébine est constituée d'une succession d'expressions algébriques autonomes ou d'équations, écrites de haut en bas, une expression par ligne, et le plus souvent isolées les unes des autres par **un séparateur** constitué d'un trait horizontal.

Au dessus du trait de séparation (l'amont) se trouve l'expression algébrique initiale et en dessous du trait (l'aval) se trouve une expression obtenue par transformation de celle en amont.

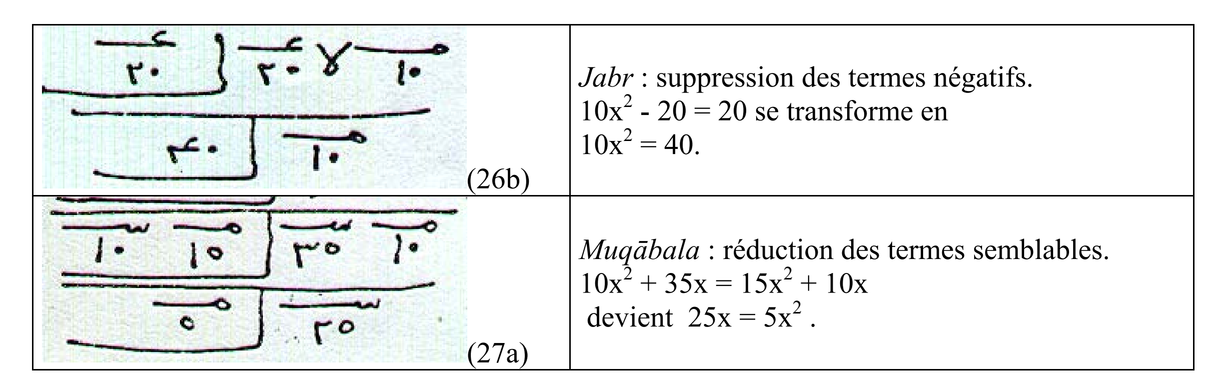
Dans leur écriture rhétorique, les mathématiciens arabes procèdent à des transformations standards sur les expressions algébriques; cela se traduit, au niveau de l'écriture symbolique maghrébine, par un certain nombre de pratiques syntaxiques.



Amont	(38b)	$(10 + x) - x^2$ multiplié par $5x$
séparateur		
aval		$50x + 5x^2 - 5x^3$

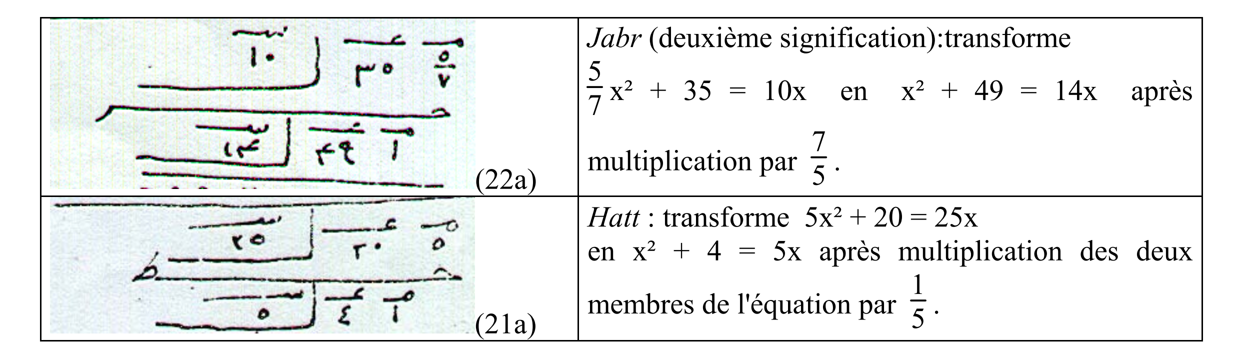
Les deux premières concernent les transformations fondatrices de l'algèbre en tant que science, *al-Jabr* (restauration, dans sa première signification : suppression des termes négatifs) et *al-Muqābala* (réduction des termes semblables); ces transformations appartiennent à la boite à outils de l'algèbre arabe et sont effectuées de manière automatique, sans explication ni justification.

Deux autres transformations, qui correspondent à une normalisation du terme dominant de l'équation algébrique, à savoir *al-Jabr* (restauration, mais dans une deuxième signification : agrandissement du coefficient fractionnaire du monôme dominant pour le ramener à 1) et *al-Hatt* (réduction à l'unité du coefficient dominant supérieur à 1) sont parfois signalées en remplaçant le trait de séparation par l'un des deux mots جـــبر ou حـــط , où la première lettre est suffisamment allongée pour recouvrir l'ensemble de l'expression en aval. Exemples:



(26b)	*Jabr* : suppression des termes négatifs. $10x^2 - 20 = 20$ se transforme en $10x^2 = 40$.
(27a)	*Muqābala* : réduction des termes semblables. $10x^2 + 35x = 15x^2 + 10x$ devient $25x = 5x^2$.

[49] Un séparateur est un symbole séparant deux expressions algébriques
[50] Un assembleur est un symbole traduisant une instruction arithmétique ou algébrique.



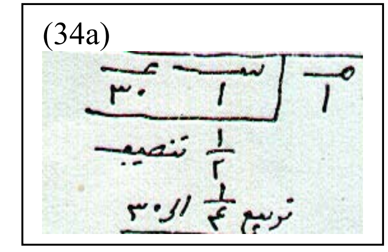
(22a)	*Jabr* (deuxième signification):transforme $\frac{5}{7}x^2 + 35 = 10x$ en $x^2 + 49 = 14x$ après multiplication par $\frac{7}{5}$.
(21a)	*Hatt* : transforme $5x^2 + 20 = 25x$ en $x^2 + 4 = 5x$ après multiplication des deux membres de l'équation par $\frac{1}{5}$.

Un texte symbolique maghrébin est toujours couronné par un résultat précédé par une suite de calculs de type algorithmique où les pas sont signalés par des termes convenus

تنصيف (*tanṣif* = division par deux),

تربيع (*tarbi*ᶜ = prendre le carré),

جذر (*jidhr* = racine carré), etc.


(34a)

B . Les assembleurs

Un assembleur est un symbole traduisant une instruction arithmétique ou algébrique agissant sur des nombres ou expressions algébriques. Par exemple, les signes représentant les "quatre opérations" ou le signe représentant le radical, sont des assembleurs. "*La présence d'un signe assembleur délimite, en effet, dans la Ligne une ou deux places spécifiques. Des places qui sont fixes et ne peuvent en aucun cas être modifiées, si peu que ce soit sous peine de rendre le texte [symbolique] inintelligible ou ambigu. Le lecteur, dans la phase de déchiffrement, doit nécessairement commencer par reconnaître l'assembleur, puis les places qu'il délimite* ". [51]

Un assembleur peut avoir une ou deux places. Ces places peuvent être occupées par des nombres de toutes sortes ou par d'autres assembleurs.

Les assembleurs à une place

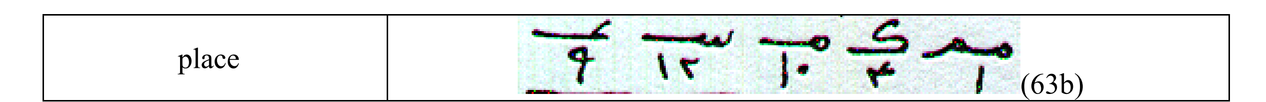
Toujours situés au dessus de la ligne, l'assembleur à une place est constitué d'un signe représentant une instruction arithmétique ou algébrique élémentaire, écrit au dessus de la ligne; il opère sur un nombre situé en-dessous de lui et qui peut être, soit un entier, une fraction ou un irrationnel, dans un cas, soit une combinaison des trois, dans un second cas, soit un assembleur à une place ou exceptionnellement un assembleur à deux places dans un troisième cas.

Les assembleurs à une place les plus utilisés sont : le radical de la racine carrée représenté[52] par ﺟـ pour جـذر (*Jidhr* = racine carrée) et les puissances de l'inconnue : عـ pour عـدد (ᶜ*Adad* = nombre), de شـ ou سـ pour شـيء (*Shay* = chose), de مـ pour مـال (*Māl* = carré), de كـ pour كـعب (*Kaāb* = cube) ainsi que l'inverse de ces puissances notée : جـ pour جزء (*Juz'u* = une part de).

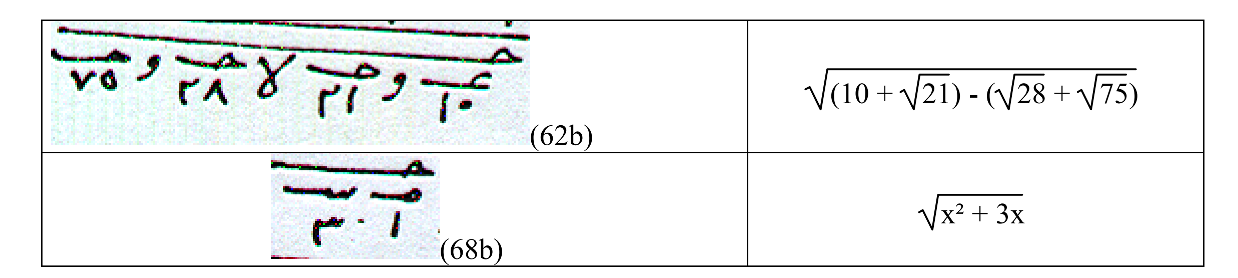
assembleur	

[51] Michel Serfati, Thèse de doctorat, page 62-63.

[52] L'utilisation de la lettre ﺟـ pour représenter le radical est attestée dans les manuscrits du XIIème siècle. Ainsi, Ibn al-Yāsamīn dans *Kitāb talqīh al-afkār* explicite cette convention : "*Nous avons placé [la lettre] « Jim » au dessus de soixante pour signifier que c'est une racine [carrée] unique"* (folio 176). Quant à $2\sqrt{9}$, elle est représentée ainsi ٢ ﺟ ٩ .

place	 (63b)

Lorsque la place est occupée par un nombre dont l'écriture est longue ou par une combinaison de nombres, ou par un assembleur à deux places, le signe est prolongé à gauche par une ligne (appelée un *vinculum*) aussi longue que nécessaire pour couvrir la place occupée en dessous, comme le montrent les exemples ci-dessous où le signe ـــس est remplacé par ــــــــــــس et ـــجـ par ــــــــــــجـ :



(62b)	$\sqrt{(10+\sqrt{21}) - (\sqrt{28}+\sqrt{75})}$
(68b)	$\sqrt{x^2 + 3x}$

Notons que l'emploi conventionnel du *vinculum* dans le cas de l'inconnue, de ses puissances ou du radical lui fait jouer un rôle de délimitant, c'est-à-dire le même rôle joué (aujourd'hui) par les parenthèses. C'est bien entendu en cela que réside l'avantage primordial de l'écriture symbolique par rapport à l'écriture rhétorique : éliminer les lourdeurs dues aux répétitions et proscrire toute forme d'ambiguïté.

Considérons l'exemple (10a) ci-dessous, son texte rhétorique s'énonce ainsi : " *3 racines et un sixième et un neuvième de racines*", la mise en facteur est visible sur le dessin alors qu'elle n'apparaît pas du tout dans le texte:

(10a)	$(3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9})x$

C'est le cas aussi de "*deux Māl et trois cinquièmes de Māl* " que l'on écrit aujourd'hui : $(2 + \frac{3}{5})\, x^2$ et qui en symboles maghrébins se note : ٢ و ٣/٥ .

Quant au radical, sa représentation symbolique évite les circonvolutions nécessaires en algèbre rhétorique pour exprimer la mise en facteur. D'un simple regard, elle permet de comprendre le sens de l'opération effectuée, comme le montre le deuxième exemple (62b) ci-dessus qui s'énonce ainsi : "*Dix plus racine (carrée) de vingt-et-un, moins la racine de vingt-huit, plus la racine de soixante-quinze, la racine [carrée] de tout cela étant considérée*".[53] Même simplification pour le troisième exemple (68b), qui se lit : "*racine[carrée] de la somme d'un Māl et de trois Shay*".

Les assembleurs peuvent être réunis

- l'un en dessous de l'autre, comme c'est le cas de ١ , ١ , ١ , ١ et ١ .
- l'un à la suite de l'autre, comme c'est le cas des puissances de l'inconnue : ١ , ١ , ١ , … , (*Māl- Māl, Māl-Ka*^{c}*b, Ka*^{c}*b – Ka*^{c}*b , etc.).*

[53] Citation en arabe du *Sharh* d'ibn al-Hā'im :
"و ذلك عشرة و جذر أحد عشرين إلا جذر ثمانية و عشرين و جذر خمسة و سبعين ماخوذة أجذارها "، صفحة 62 ب

Dans les manuscrits maghrébins, on trouve les deux présentations. Cela dépend en fait de l'espace alloué à la représentation symbolique. Le plus souvent, lorsque deux assembleurs sont concernés, c'est la deuxième manière qui est utilisée, mais lorsque leur nombre est plus grand, c'est la première que l'on trouve. L'exemple suivant, extrait d'une copie de 1189H=1795 de *Bughyat at-Tullāb* d'Ibn Ghāzi[54] illustre notre propos :

	$(2x^4 + 4x^6 + 6x^5)(2x^4 + 4x^6 + 6x^5)$ ———————————— $4x^8 + 52x^{10} + 24x^9 + 16x^{12} + 48x^{11}$

Cette manière de représenter la succession d'assembleurs, les uns en dessous des autres, la lecture à partir du haut, nous rappelle d'abord celle d'as-Samaw'al[55] et confirme ensuite notre hypothèse selon laquelle un lien intime entre représentation symbolique et utilisation de la planche à calcul, qu'elle soit un *takht* ou une *lawḥa* : La représentation symbolique est un calque de l'essentiel de se qui se passe sur la planche pendant la partie heuristique du calcul.

Le statut de l'assembleur de l'inversion جـز pour جزء (*juz'u* = part de) utilisé par Muhammad al-Bāz est assez incertain[56]. A la suite d'al-Karāji (qui, lui-même avait repris presque littéralement la terminologie de Diophante, dans sa traduction arabe), Ibn al-Hā'im associe à toute puissance de l'inconnue son inverse. A l'inconnue *Shay* est associé *Juz'u Shay* (part de la chose) et à *Māl* est associé *Juz'u Māl* (part du carré de l'inconnue) et à *Ka*^{c}*b* l'expression *Juz'u Ka*^{c}*b*, etc.

On trouve dans la marge du manuscrit de Jerba deux représentations de cet opérateur de l'inversion, la première dans la marge des folios 36a - 37a et la seconde à partir du folio 43a. :

Première représentation de x^{-1}, x^{-2} et x^{-3}	Deuxième représentation de x^{-1}, x^{-2} et x^{-3}
جـز شـ ١ ; جـز مـ ١ ; جـز كـ ١	سـ جـز ١ ; مـ جـز ١ ; كـ جـز ١

Dans la première représentation, c'est bien l'opérateur d'inversion qui agit sur l'inconnue ou sur l'une de ses puissances, la lecture se faisant de haut en bas[57].

La difficulté apparaît dès que l'on oublie l'origine de cette notation et que l'on souhaite représenter plusieurs inverses. Pour représenter $5\,x^{-1}$, c'est-à-dire rhétoriquement *Khamsa Ajzā Shay*

[54] Voir note 27 ci-dessus.

[55] Dans ses tableaux, as-Samaw'al assigne une étiquette en toutes lettres à chaque colonne. Le polynôme $x + 8x^2 + 3x^3$ sera représenté par *l'expression aux images connues* suivante (lecture de droite à gauche) :

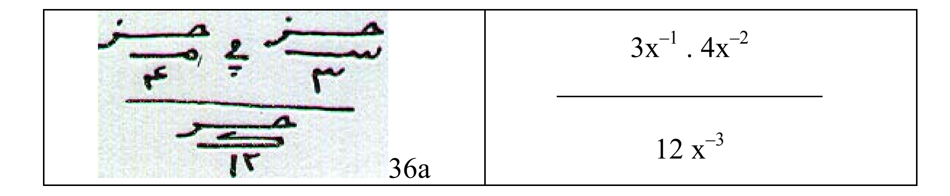
كـعب	مـال	شـيء	← exposants
٣	٨	١	← coefficients

[56] Ahmed Djebbar signale dans sa thèse (note n°114) avoir trouvé le symbole جمك pour "*inverse de la puissance cinquième de la chose*" dans le Mss Istambul, Laleli n°2734, ff1-18, qu'il pense être Ḥāwi al-Lubāb d'Ibn Majdi (1364-1443).

[57] C'est d'ailleurs ainsi qu'elle est représentée par as-Samaw'al dans ses tableaux, chaque colonne étant étiquetée en toutes lettres.

جزء شـيء	جزء مـال	جزء كـعب
٤٣	٨٩	١٢

(Cinq parts de la chose), on trouve جـز شـ ٥ . Il y a visiblement rupture de contrat, puisque la lecture naturelle de la représentation choisie pourrait donner *Juz'u Khamsa 'Ashiyā* (une part de 5 choses, c'est-à-dire $\frac{1}{5x}$). On le voit bien dans le fac-similé suivant :

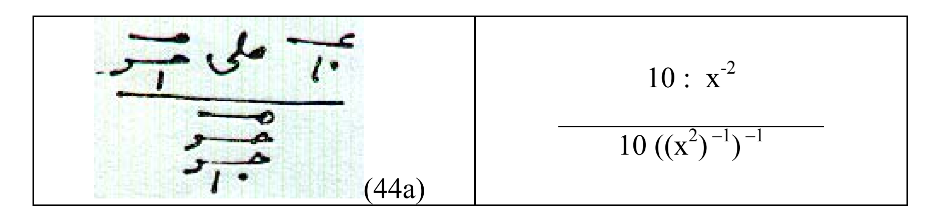
 36a	$3x^{-1} . 4x^{-2}$ / $12\ x^{-3}$

Cette notation semble avoir gêné l'auteur de la marge, parce qu'elle ne pouvait pas être reconnue indépendamment du texte central. Il adopte donc une nouvelle notation pour le même assembleur, à partir du folio 43a, comme on le voit dans les fac-similés suivants :

43b	$5x^{-1} . 2x^{2}$ / $10\ x$
43b	$10x : 2x^{2}$ / $5\ x^{-1}$

Khamsa Ajzā Shay (cinq parts de la chose) est maintenant notée شـ جـز ٥ .

Selon cette deuxième convention, on lit de bas vers le haut, comme c'est le cas dans la forme rhétorique du texte. En effet, Ibn al-Hā'im dit : «*Ne vois-tu pas que si tu multiplies cinq parts d'une chose par deux carrés [de la chose]; comme tu le sais, le résultat sera dix choses*" (folio 43b)[58]. Ceci est à nouveau confirmé dans l'exemple ci-dessous où l'on peut suivre le texte mot à mot : "*ᶜAshrāta Ajzā Ajzā Māl*" (dix parts de parts du carré) en remplaçant chaque mot par son symbole et en écrivant les signes de bas vers le haut.

 (44a)	$10 :\ x^{-2}$ / $10\ ((x^{2})^{-1})^{-1}$

Au delà de l'hésitation que nous venons de constater dans le choix d'une notation adéquate pour "part de", nous pouvons toutefois expliquer cette indécision par le fait qu'interviennent ici les pratiques contradictoires de la représentation symbolique. La première, qui semble être la plus commune, correspondrait à un calque de ce qui se dessine sur la planche à calcul et qui en résume les étapes : énoncé et résultat (rappelons-nous la remarque d'Ibn Ghāzi signalée en note 27 plus haut); la seconde semble être plus circonstancielle et exceptionnelle : elle aurait pour principe directeur le remplacement de chaque terme de la phrase rhétorique stéréotypée par les symboles des termes employés en les écrivant dans le même ordre que dans le texte, mais de bas vers le haut.

[58] Texte d'ibn al-Hā'im, folio 43b:
"ألا ترى أنك لو ضربت خمسة أجزاء شيء في مالين ، كما عرفت ، لكان الخارج عشرة أشياء" (إبن الهائم : شرح الأرجوزة ، صفحة ٣٤ ب)

Les assembleurs à deux places

Un assembleur à deux places est un symbole représentant une instruction faisant intervenir deux places, l'une située en amont et l'autre en aval. Chez les Maghrébins, deux dispositions sont utilisées : dans l'une, les trois composantes sont sur la ligne (de droite à gauche) et dans l'autre, elles sont placées de haut en bas (l'amont au dessus, l'assembleur sur la ligne et l'aval en dessous).

<table>
<tr><td colspan="3">Première disposition</td><td colspan="2">Deuxième disposition</td></tr>
<tr><td colspan="3">←———</td><td rowspan="3">↓</td><td>amont</td></tr>
<tr><td>aval</td><td>assembleur</td><td>amont</td><td>assembleur</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>aval</td></tr>
</table>

L'algèbre maghrébine fait appel, pour chacune des opérations arithmétiques, à deux types d'opérateurs, le premier sera considéré comme un opérateur d'action, le second comme un opérateur d'état.

Les opérateurs d'action correspondent aux opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division. Des stéréotypes leurs sont associés :

اجمع الى (*Ijma^c ilā* = ajoute à*)* ,
اطرح من (*Iṭraḥ min* = soustrait de) ,
اضرب في (*Idhrab fi* = multiplie par) et
اقسم على (*Iqsam ^{c}alā* = divise par) .

Ils sont éphémères, en ce sens qu'ils sont utilisés pour formuler, d'une manière conventionnelle, l'énoncé d'un problème, pour être remplacés immédiatement, soit par le résultat du calcul, soit par une expression formelle contenant un opérateur d'état.

Les opérateurs d'état expriment plutôt le résultat de l'opération; des termes précis leurs sont attribués :

و (*Wāw* = plus) ,
الا (*Illa* = moins),
فى (*Fi* = multiplié par)
مقــسوم (*Maqsūm* = divisé) et
سم … من … (*Sammi min* = dénomme … à partir de …)

Ils constituent le plus souvent un attribut et, en tant que tels, figurent tout au long des calculs ainsi que dans le résultat : expressions polynomiales ou fractions rationnelles.

La symbolique maghrébine a réservé aux assembleurs deux types de signes suivant qu'ils fonctionnent comme opérateurs d'action ou comme opérateurs d'état[59].

Aux opérateurs d'action, sont associés les signes[60] :

الى (*Ilā)* ,

[59] Si l'on se réfère aux thèses de David Tall, les opérateurs d'action sont de type procédural et les opérateurs d'état de type proceptuel. Voir par exemple: Gray and Tall, (1993), *Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of symbols as Process and Concept,* Mathematics Teaching, 142, 6-10.

[60] Ces signes se trouvent déjà en arithmétique des fractions maghrébines comme on le voit dans *Talqīḥ al-afkār fil ^{c}Amal bi rushūm al-ghubār* d'Ibn al-Yāsamīn : في (folio 49) , الى (folio 61) , من (folio 67) , على (folio 72) . En introduisant le signe لا de la négation. Ibn al-Yāsamīne attribue explicitement ces symboles aux "*spécialistes du ḥisāb al-ghubār*" (folio 64).

من (*Min* = de). Signalons que ce signe n'est pas univoque, il est employé à la fois pour la soustraction et pour la dénomination.
في (*Fi* = par) et
على (*ᶜAlā* = sur)

et aux opérateurs d'état, les signes :

و (*Wāw* = plus)[61] ,
لا (*Illa* = moins),
فى (*Fi* = fois) et
مـق (*Maqsūm* = divisé).

La somme : opérateur d'état

En général, aucun symbole n'est utilisé pour représenter le résultat d'une addition de deux ou de plusieurs monômes algébriques. Il suffit de les juxtaposer pour représenter leur somme:

(63b) se traduit par le trinôme $3 + 2x + x^2$.

Cependant, lorsqu'il y a ambiguïté possible de lecture ou lorsque les places sont occupées par des assembleurs à deux places, on intercale entre les monômes la lettre و (*Wāw*). Du point de vue syntaxique, la présence de ce symbole ou son absence sont équivalentes. Signalons que, compte tenu de la commutativité de l'addition, la place occupée en amont peut aussi être occupée en aval.

L'addition : opérateur d'action

Lorsque l'on désire noter que l'on ajoute une expression algébrique à une autre, on les sépare par l'opérateur إلى (*Ilā*), comme on peut le voir dans la première ligne du fac-similé ci-dessous:

(53b)	$\frac{10}{x}$ est ajouté à $\frac{10}{2x}$ $\frac{10}{x} + \frac{10}{2x}$

Signalons la nuance sémantique, introduite sans effet sur le résultat, lors de l'emploi de الى . Dans l'exemple (53b) ci-dessus, il s'agit d'ajouter la fraction $\frac{10}{x}$ à la fraction $\frac{10}{2x}$; c'est cette dernière qui est donc supposée déjà connue, la première lui étant ajoutée par la suite. La place en aval est celle donnée en premier lieu, celle en amont lui étant toujours ajoutée. Cette nuance sémantique n'existe pas avec le signe و . Il faut noter, par ailleurs, que l'algébriste maghrébin s'empresse de remplacer le signe الى par le signe و .

La négation : opérateur d'état

L'algébriste arabe ne connaît pas les nombres soustraits, ne les conçoit pas et ne les acceptent pas comme solutions d'un problème. Il est en cela un héritier des géomètres grecs et en aucune

[61] Ce symbole est souvent remplacé par un espace vide situé entre les deux expressions à ajouter; on trouve, dans certains manuscrits, parfois à sa place le symbole $\therefore$.

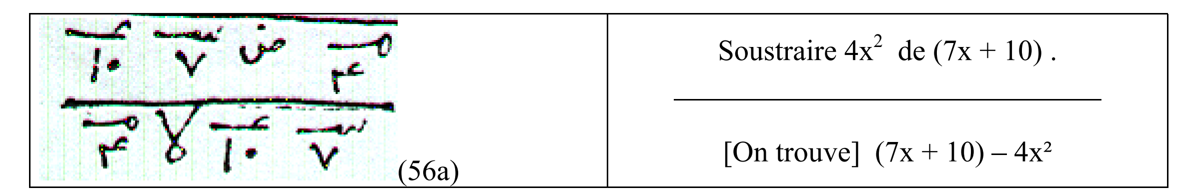
manière un successeur des algébristes indiens[62]. Pour l'algébriste maghrébin l'opérateur d'état لا (*Illa* = moins)[63] représente le terme الا qui, lorsqu'il est accolé à un nombre, en fait un nombre incomplet (*Nāqis*) devant être éliminé par *al-Jabr*, opération fondamentale de l'algèbre arabe, l'équation étant restaurée par suppression des termes de la négation. Ecrire "*Illa khamsa*" (cinq soustraite) dans une expression, ou dans un tableau[64], c'est *al-Istithnā* ou encore la négation, caractère de ce qui est incomplet. La présence du signe لا suppose implicitement que les termes qui le précèdent sont "plus grands" que ceux qui le suivent. Ibn al-Hā'im consacre à *al-Istithnā* un paragraphe entier pour expliquer les règles d'*al-Muqābala* (restauration d'une équation afin de n'y laisser que des nombres complets (folios 26a - 27b)) et un autre paragraphe aux opérations sur les expressions algébriques contenant le signe لا (folios 40a - 40b).

La soustraction : opérateur d'action

Un signe est réservé pour la soustraction من (*Min* = soustrait de). Il n'a pas les mêmes valeurs syntaxiques que ceux de لا . En effet, pour لا , l'amont doit nécessairement être supérieur à l'aval, alors que c'est le contraire pour من pour lequel l'amont est inférieur à l'aval.

Ibn al-Hā'im propose, à partir du folio 56a, l'expression اطرح من (*Iṭraḥ min* = soustraire de). Il s'agit de soustraire une expression algébrique d'une autre (supposée plus grande). Pour cela, il établit une règle claire pour passer de la soustraction à la négation : «*Si les [deux expressions algébriques] sont différentes, la soustraction se fait avec le terme de la négation* ». Et pour mieux expliquer sa pensée, l'auteur ajoute : « *comme lorsqu'on dit : soustrais dix choses de dix carrés , ôte les choses des carrés ; le résultat étant dix carrés moins dix choses* [65]» (56a).

Le lien entre les deux signes: من (*Min*) et لا (*Illa*) est plusieurs fois explicité dans le manuscrit, comme le montre l'exemple suivant :



(56a)	Soustraire $4x^2$ de $(7x + 10)$.
	[On trouve] $(7x + 10) - 4x^2$

Nous verrons par la suite le niveau de priorité de chacun de ces deux assembleurs.

La multiplication

Le signe فى (*Fi* = fois) est un assembleur en ligne représentant la multiplication. Ses deux places sont indifféremment occupées par un nombre, un assembleur à une place ou une expression algébrique quelconque. Dans l'exemple suivant de multiplication de deux expressions polynomiales, le lecteur admirera la concision de l'écriture symbolique, la puissance de l'algorithme proposé qu'un premier coup d'œil peut immédiatement percevoir et sa modernité:

[62] Les algébriques indiennes manipulent les nombres positifs et négatifs dans leurs équations et acceptent des solutions négatives. C'est ce que Léon Rodet montre dans "*L'algèbre d'al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque"*, Journal Asiatique, janvier 1978. pp5-98.

[63] Dans de nombreux manuscrits, le signe لا est remplacé par le mot lui-même : الا .

[64] as-Samaw'al est un des rares algébristes arabes à avoir isolé des coefficients négatifs dans des tableaux, coefficients des *expressions aux images connues*.

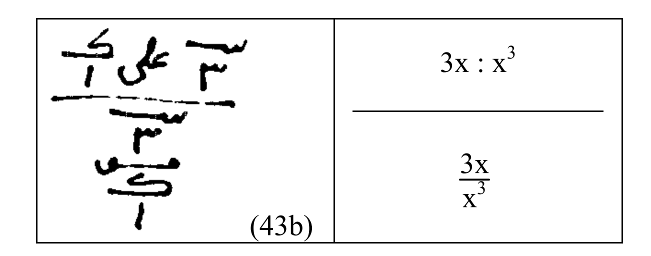
[65] Citation du *Sharh* d'ibn al-Hā'im :

" كأن يقال إطرح عشرة أشياء من عشرة أموال ، فاستثني الأشياء من الأموال ، ليكن الجواب عشرة أموال إلا عشرة أشياء ". شرح الارجوزة لإبن الهائم (صفحة 56)

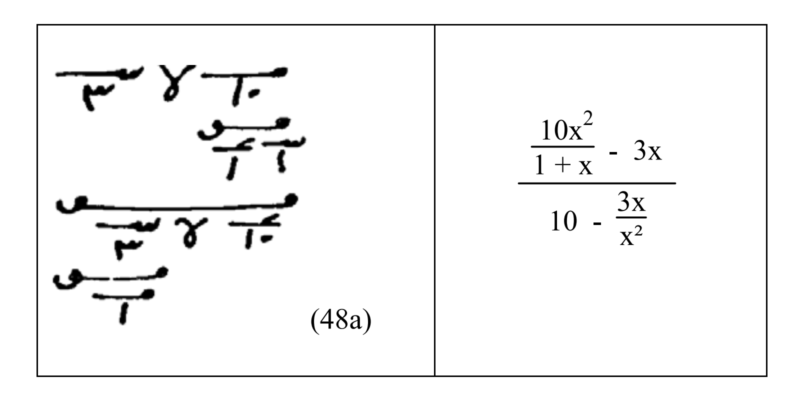
(37b)	$(4x + 3x^2 + 5x^3)$ fois $(4 + 3x + 5x^2 + 4x^3)$ $16x + 12x^2 + 20x^3 + 24x^4 + 18x^5 + 20x^6$ 12 9 15 20 15 25 $16x + 24x^2 + 49x^3 + 54x^4 + 43x^5 + 20x^6$

La division

Deux signes sont utilisés pour représenter la division, le premier, opérateur d'action : على (*ᶜAlā* = sur), est un assembleur en ligne que nous pourrions représenter aujourd'hui par le symbole " : " et l'autre, opérateur d'état : مـق (*Maqsūm* = divisé par)[66], se lit de haut en bas et peut être représenté aujourd'hui par la barre de séparation des fractions rationnelles. Pour chacun , l'amont est occupé par le dividende et l'aval par le diviseur, les deux pouvant être soit des nombres, soit des expressions algébriques. Le passage d'un symbole à l'autre est explicité dans l'exemple suivant :



L'avantage de l'assembleur vertical est de délimiter graphiquement le dividende et le diviseur en allongeant la première lettre de مــــــق ainsi loin que nécessaire, évitant ainsi toute ambiguïté de lecture, comme le montre l'exemple suivant :



La dénomination : opérateur d'action.

La dénomination est un assembleur utilisé par les algébristes arabes dans le cadre de l'arithmétique des fractions. Ibn al-Hā'im l'utilise aussi dans le cadre de l'arithmétique des irrationnels. Au folio 50b, il se propose, par exemple, de "*dénommer racine (carrée) de quatre à partir de racine (carrée) de neuf* " , c'est-à-dire trouver un nombre qui multiplié par $\sqrt{9}$ donne $\sqrt{4}$. La réponse est *thuluthayn* (deux-tiers).

Le signe associé à cet opérateur d'action est من (*Min*), déjà utilisé pour représenter l'opérateur d'action de la soustraction. Cet usage non univoque d'un même signe peut être source d'ambiguïté, cependant le contexte permet en général de la lever, le résultat de l'action indiquant immédiatement la signification du signe utilisé.

[66] Dans *Bughyat at-Tullāb*, Ibn Ghāzi note قـ la division, comme on le voit page 309 de l'édition de Souissi.

C . Le niveau hiérarchique des assembleurs

L'emploi de plusieurs assembleurs dans une même expression algébrique peut entraîner des ambiguïtés dans la compréhension d'un même assemblage et même des lectures opposées[67]. Le cas classique, cité de nos jours, est l'expression : a + b.c . Sans règles hiérarchiques bien déterminées, cet assemblage peut indifféremment être lu a + (bc) ou (a + b)c. On sait aujourd'hui, que dans ce cas précis, il n'y a aucune ambiguïté de lecture et que a + b.c correspond toujours à l'expression a + (bc).

C'est pour neutraliser ce type de difficulté que servent les règles définissant les niveaux hiérarchiques des assembleurs. Comme, nous ne possédons pas de traité maghrébin explicitant ces règles, nous allons essayer de les identifier essentiellement à partir de leur pratique dans le manuscrit de Jerba et, accessoirement, en consultant d'autres manuscrits.

Considérant deux assembleurs a et b . Nous disons que l'assembleur a est d'un niveau hiérarchique inférieur à celui de b si, chaque fois que a et b apparaissent en même temps dans une expression algébrique, b est toujours extérieur à l'assemblage défini par a. Cela revient à dire que l'assemblage défini par a est inclus dans l'une des places de b. En notation moderne utilisant les parenthèses, on écrira : ((___ a ___) b ___).

Nous essayerons, ci-dessous, de classer les différents assembleurs en niveaux, tout en signalant que des exceptions peuvent, à l'usage, apparaître :

- Niveau de base : Le niveau hiérarchique des assembleurs à une place est, en principe, le plus bas : leur place unique est généralement occupée par un nombre entier ou par un nombre fractionnaire.
- Niveau inférieur : L'opérateur d'état و ou, à défaut, la juxtaposition de deux assembleurs à une place. Ses deux places peuvent être occupées par des assembleurs à une place ou par des nombres purs. Il y a cependant une exception lorsque ce symbole est utilisé en même temps que le signe لا .
- Niveau central : Les opérateurs d'état لا , مــق et l'assembleur à une place جـ (racine carrée) , lorsqu'il opère sur une expression polynomiale. Compatibles les uns avec les autres, les opérateurs d'état répondent à des règles hiérarchiques que nous expliciterons ci-dessous.
- Niveau supérieur : Les opérateurs d'action الى , من , فى et على . Ils sont incompatibles entre eux. On ne les rencontre jamais dans la même expression algébrique. Leur niveau est supérieur à celui des opérateurs d'état, comme le montrent les exemples (37b) ou (53a) cités plus haut.

L'emploi répété de l'assembleur لا

Ibn al-Hā'im consacre un paragraphe (49[a]) pour attirer l'attention du lecteur sur la difficulté d'emploi du terme الا , opérateur d'état exprimant l'incomplétude ou le manque. Il insiste sur le fait que la négation d'un nombre soustrait (*Munfā*) est un nombre confirmé (*Muthabbat*). C'est l'emploi répété de cet assembleur posant problème qu'il résout par une convention admise chez les mathématiciens arabes. Ibn al-Hā'im explique: "*Ne vois-tu pas que lorsque l'on dit : dix moins six moins quatre, le quatre serait muthabbat* (confirmé) *sémantiquement bien qu'il soit soustrait [syntaxiquement], puisque le soustrait du confirmé est munfā* (soustrait) *et [le soustrait]du soustrait est confirmé. Le six étant soustrait de dix, qui est confirmé, est donc soustrait et le quatre soustrait d'un soustrait est confirmé"* (folio 49a)[68].

---

[67] « Là où l'écriture rhétorique avait été précise, mais laborieuse, dans sa désignation d'un ordre de succession des opérations, celles des écritures symboliques … est donc fautive, puisqu' incapable de discriminer entre deux lectures incompatibles. » (Serfati, page 72).

[68] Citation d'ibn Hā'im :

"ألا ترى أنه لو قيل عشرة إلا ستة إلا أربعة لكانت الأربعة مثبتة معنى وان كانت مستثنات لأن المستثنى من المثبت منفى ومن المنفى مثبت. فالستة مستثنات من العشرة وهي مثبتة، فالستة منفية والأربعة مستثنات من المنفى فهي مثبته." ابن هائم (صفحة 49 أ)

Nous retrouvons la même convention dans *at-Ṭabsira* d'al-Qalaṣādi. Citons-le : "*Si les soustractions se répètent, tu en soustrais certaines … et tu en ajoutes certaines. Ce que tu ajoutes, ce sont [les nombres] qui suivent les termes* الا *[situés] en première, troisième, cinquième, septième et tout autre position impaire. Ce que tu soustrais, ce sont [les nombres qui suivent les termes* الا *[situés] en deuxième, quatrième, sixième et tout autre position paire.*" (page 56)[69] .

De même, Al-Qaṭrawāni commence par énoncer la règle des signes, puis s'intéresse à l'emploi répété de la négation et en explicite la convention d'emploi en la traduisant au niveau du symbolisme maghrébin. Citons-le : "*Sache que [parmi] les négations, qu'elles soient rares ou nombreuses, [celles] [en positions] impaires sont Munfā* (soustraites), *et celles en positions paires sont Muthabbat* (confirmées). *Il y a deux méthodes de les calculer : l'une consiste à placer les impairs de côté sur la planche et à les additionner, soit effectivement, soit avec le Wāw de l'addition; quant aux paires, on les place sur l'autre côté de la planche et on les additionne aussi et on place après le [signe de] la négation, soit leur somme, soit [eux mêmes] avec les Wāw de l'addition. Tu soustrais le second du premier, soit réellement, soit en utilisant le terme de la négation … Quant à la deuxième méthode, [elle consiste] à placer au dessus du premier des termes soustrais le mot* منفى*, au dessus de celui qui le suit* مثبت*, et ainsi de suite jusqu'à la fin de la ligne, au dessus de l'impair* منفى *et du pair* مثبت . *Cette manière de procéder est utile dans le calcul des produits des espèces algébriques lorsqu'elles contiennent des termes soustraits, ainsi que dans le calcul des binômes et des apotomes."*(p.58). al-Qaṭrawāni illustre sa méthode sur l'exemple suivant dans lequel le copiste a placé les termes *Munfā* et *Muthabbat* en dessous des signes et au dessus comme il était prescrit dans le texte (folio 31) :

منفى مثبت منفى مثبت	25 – 11 – 9 – 5 – 3 munfā muthabbat munfā muthabbat

Cette convention est appliquée également par Ibn Ghāzi dans *Bughyat at-Tullāb*, (page 130), et elle est signalée dans l'étude des fractions maghrébines par Zarrouqi (1993). Ce dernier remarque que cette convention est annulée lors de l'ajout dans le texte du signe و (*Wāw* = et), signe de l'addition, avant الا , ce qui donne و الا ("et moins"). En fait, dans ce cas là , و الا possède la signification de و .

<u>al-Karāji et la répétition de la négation</u>

Chez al-Karāji, les deux formes : « … و … الا » et « … و الا … الا », sont présentes dans *al-Fakhri* comme le signale Sesiano (1999) page 434.

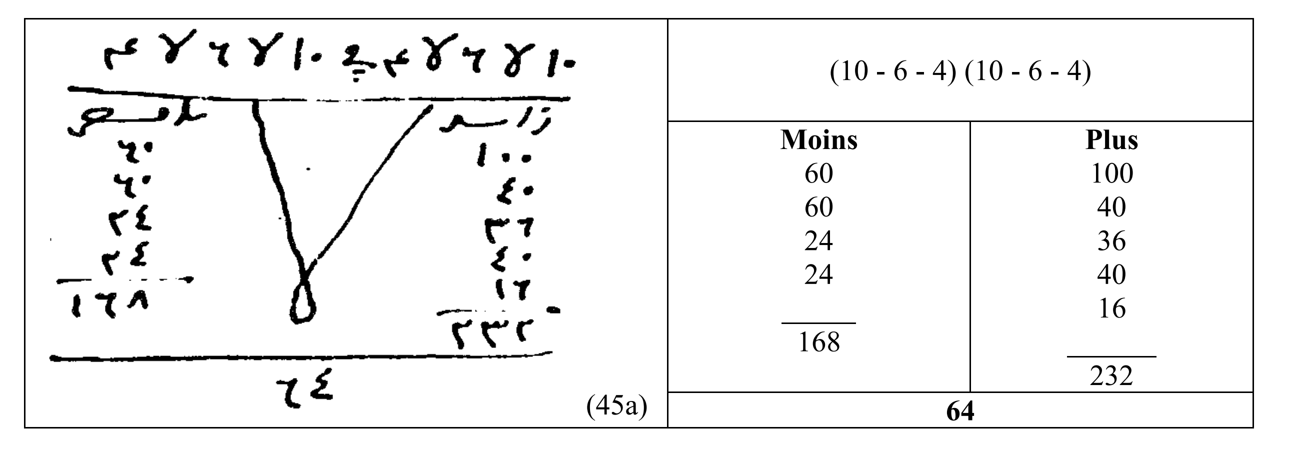
Rappelons que l'algèbre d'al-Karāji est rhétorique; il n'y a pas d'utilisation de symboles algébriques; cependant le signe الا est un attribut du coefficient numérique. Comme nous l'avons déjà expliqué plus haut, son disciple As-Samaw'al, représente les expressions algébriques, qu'il dénomme *expressions aux images données*, dans des tableaux contenant les coefficients des polynômes, coefficients additifs ou soustractifs écrits en chiffres indo-arabes (d'Orient). Il n'hésitera pas à placer dans une case du tableau الا٨ et à écrire "*Multiplions six par* الا ٨ *; nous trouvons* الا٤٨ ".

<u>La répétition de الا dans l'écriture symbolique maghrébine</u>

Il n'est pas sans intérêt de constater que dans le manuscrit de Jerba, on retrouve la première méthode expliquée ci-dessus par al-Qaṭrawāni. Cela apparaît très clairement dans le fac-similé suivant:

[69] Citation d'al-Qalasādi :

" إذا تكررت الاستثناءات، فإنك تلغي بعضها ... وتثبت بعضها. فأما المثبت فهو ما بعد إلا الأول والثالثة والخامسة، والسابعة وما زاد من الأفراد أبدا. وأما الملغى فهو ما بعد إلا الثانية والرابعة والسادسة وما بعدها من الأزواج أبدا. فإنه يثبت قبل إلا." القلصادي (صفحة 56)



(10 - 6 - 4) (10 - 6 - 4)	
Moins	**Plus**
60	100
60	40
24	36
24	40
	16
168	232
64	

(45a)

Cette convention bien clairement énoncée et longuement détaillée dans les textes rhétoriques concerne le niveau hiérarchique d'un même assembleur lorsqu'il est employé plusieurs fois dans une expression arithmétique ou algébrique. En fait, dans l'écriture de droite à gauche, le premier الا est d'un niveau supérieur à ceux qui le suivent. En écriture moderne, cela reviendrait à ouvrir une parenthèse après chaque الا . Suivons cette règle dans l'exemple ci-dessous proposé par al-Qalaṣādi : (lecture de droite à gauche)

$\frac{1}{7}\,\frac{1}{3}$ الا $\frac{1}{4}\,\frac{7}{9}$ ← $\frac{1}{7}$ الا $\frac{1}{4}$ الا $\frac{1}{3}$ الا $\frac{7}{9}$

ce qui se traduit en écriture moderne, où l'on introduit des parenthèses et le signe de l'égalité, par : (lecture de droite à gauche)

$(\frac{1}{7}+\frac{1}{3})$ الا $(\frac{1}{4}+\frac{7}{9}) = ((\frac{1}{7}$ الا $\frac{1}{4})$ الا $\frac{1}{3})$ الا $\frac{7}{9} = \frac{1}{7}$ الا $\frac{1}{4}$ الا $\frac{1}{3}$ الا $\frac{7}{9}$

Quand le signe و est ajouté, il annule l'effet de إلا , comme le montre l'exemple suivant donné par Zarrouqi (lecture de droite à gauche) :

$\frac{1}{5}\frac{1}{7}\frac{1}{4}$ الا $\frac{1}{3}\,5$ ← $\frac{1}{5}$ الا و $\frac{1}{7}$ الا و $\frac{1}{4}$ الا $\frac{1}{3}\,5$

ce qui se traduit en écriture moderne par : (lecture de droite à gauche)

$(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4})$ الا $(\frac{1}{3}+5) = (\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{4})$ الا $\frac{1}{3}\,5 = \frac{1}{5}$ الا و $\frac{1}{7}$ الا و $\frac{1}{4}$ الا $\frac{1}{3}\,5$

La combinaison de لا et de من

Les assembleurs لا et من expriment tous deux la négation, le premier étant un opérateur d'état et le second un opérateur d'action. Lorsqu'il se retrouvent tous deux dans une même expression algébrique, le second est d'un niveau supérieur au premier. Pourtant, l'algébriste arabe préfère d'abord se débarrasser des لا afin de ne pas se retrouver avec une succession de لا consécutifs. L'exemple suivant montre bien cette procédure qui se termine par une expression stable contenant le signe لا :

(56b)	$(10x^2 - 10x)$ soustrait de $(20x^2 - 50)$ $(10x^2 + 50)$ soustrait de $(20x^2 + 10x)$ 50 soustrait de $(10x^2 + 10x)$ $(10x^2 + 10x) - 50$

La combinaison de لا et de و

Nous avons signalé que لا est d'un niveau hiérarchique central. Lorsqu'il est utilisé en même temps que le signe و , les nivaux hiérarchiques deviennent confus et correspondent à des situations contradictoires.

1. Dans l'exemple suivant trouvé dans la marge du folio 52a , c'est le signe de l'addition qui est central ; il est en fait d'un niveau hiérarchique supérieur au signe de la négation.

$5x - 3 + 3x^2 - x^3 = (5x - 3) + (3x^2 - x^3)$	سـ ٥ لا ٣ و مـ ٣ لا كـ ١

Si l'on isole cette expression algébrique hors de son contexte, d'autres lectures peuvent être imaginées, telles en notation moderne: $5x - (3 + 3x^2) - x^3$ ou bien $5x - (3 + 3x^2 - x^3)$.

2. Dans l'exemple suivant trouvé dans la marge du folio 62b , c'est le signe de la négation qui est central et il est ici d'un niveau hiérarchique supérieur au signe de l'addition.

$\sqrt{10} + \sqrt{75} - \sqrt{28} + \sqrt{21} = (\sqrt{10} + \sqrt{75}) - (\sqrt{28} + \sqrt{21})$	جـ ١٠ و جـ ٧٥ لا جـ ٢٨ و جـ ٢١

Si l'on isole cette expression algébrique hors de son contexte, d'autres lectures peuvent être imaginées, telles en notation moderne:
$\sqrt{10} + (\sqrt{75} - \sqrt{28}) + \sqrt{21}$ ou bien $\sqrt{10} + (\sqrt{75} - \sqrt{28} + \sqrt{21})$.

Les deux exemples qui précèdent montrent les limites de la symbolique maghrébine.

La combinaison de لا et de مـــق

Nous avons signalé que, dans l'écriture symbolique, لا est d'un niveau hiérarchique supérieur à مـــق . En revanche, le texte rhétorique est confus lorsque l'on veut utiliser les termes الا et مـقـسـوم . C'est ce que signale Ibn al-Hā'im qui consacre un paragraphe spécifique à l'emploi simultané dans une même expression algébrique de ces deux termes. Il constate sur l'exemple suivant qu'un texte contenant ces deux termes peut être interprété de quatre manières possibles : "*Divise dix divisé par un carré diminué(e) d'une chose par trois choses divisé(es) par un carré moins trois dirham.* "[70] (folio 47b). Les quatre choix possibles sont par la suite longuement traités par l'auteur.

[70] Citation d'Ibn al-Hā'im :
" اقسم عشرة مقسومة على مال إلا شيئا على ثلاثة أشياء مقسومة على مال غير ثلاثة دراهم" (شرح الأرجوزة لابن الهائم صفحة 47b)

La marge du folio 47b est occupée par les traductions en symboles maghrébins des quatre lectures possibles que nous présentons ci-dessous :

	$(\frac{10}{x^2} - x) : \frac{3x}{x^2 - 3}$		$\frac{10}{x^2 - x} : (\frac{3x}{x^2} - 3)$
	$\frac{10}{x^2 - x} : \frac{3x}{x^2 - 3}$		$(10 - x) : (\frac{3x}{x^2} - 3)$

(Notez que la quatrième figure est erronée. L'expression exacte est $(\frac{10}{x^2} - x) : (\frac{3x}{x^2} - 3)$. L'auteur de la marge corrige la faute immédiatement dès la deuxième ligne de calcul).

Contrairement au texte rhétorique, ces formules symboliques sont claires et ne sont sujettes à aucune ambiguïté de lecture . C'est dans des situations de ce genre que l'on constate la supériorité de l'écriture symbolique sur l'écriture rhétorique.

L'emploi simultané des assembleurs على et ـــق

Les assembleurs على et ـــق expriment tous deux la division, le premier étant un opérateur d'action et le second un opérateur d'état. Lorsqu'il se retrouvent tous deux dans une même expression algébrique, le premier est d'un niveau supérieur au second. Dans le texte, Ibn al-Hā'im rappelle trois manières de calculer $\frac{a}{b} : c$.

- Effectuer la division de a par b , puis diviser le résultat obtenu par c .
- Multiplier b par c , puis diviser a par le résultat obtenu.
- Diviser a par c , puis diviser le résultat par b .

Pour chacune de ces méthodes, la marge du folio 45a illustre en symboles un exemple de simplification.

$\frac{20x^3}{5x^2} : 5x$ __________ $4x : 5x$ __________ $\frac{4}{5}$	$\frac{20x^3}{5x^2} : 5x$ __________ $20x^3 : 25x^3$ __________ $\frac{4}{5}$	$\frac{20x^3}{5x^2} : 5x$ __________ $4x^2 : 5x^2$ __________ $\frac{4}{5}$

Lorsque plusieurs signes se succèdent dans la même expression, écrits de haut vers le bas, le premier est d'un niveau hiérarchique supérieur aux suivants. Cette hiérarchie descendante peut s'exprimer grâce au *vinculum*, mais l'ignorance des copistes ou leur négligence peut introduire une confusion dans les notations, comme le montre l'exemple suivant où les signes مـــــق sont de même longueur :

(45a)	$\frac{20}{2x}$ divisé par $(x + 2)$
	$\frac{\frac{20}{2x}}{x + 2}$

Dans ce dernier exemple, la réponse correcte est celle que nous proposons en notation moderne dans la colonne de droite. Par contre, compte-tenu de l'absence de *vincula*, si l'on isole le fragment du fac-similé de la colonne de gauche, on pourrait le lire d'une autre manière: "20 divisé par $\frac{2x}{x + 2}$ ", qui est une solution erronée.

D . L'organisation du texte symbolique

L'organisation du texte symbolique maghrébin, telle que nous la découvrons dans le manuscrit de Jerba, est construite suivant un ordre temporel, les phrases symboliques se succédant au fur et à mesure de leur production et s'écrivant une par ligne, les unes à la suite des autres, de haut en bas, séparées par l'un des séparateurs. Ces phrases sont de cinq types :

- Les instructions : Ce sont des expressions algébriques impliquant au moins un assembleur d'action, présent une seule fois par ligne, le signe de l'égalité étant toujours absent.
- Les mises en équation initiale de l'énoncé : Il s'agit de traduire l'énoncé algébriquement en choisissant l'inconnue principale et les inconnues secondaires ou dépendantes éventuelles.
- Les calculs intermédiaires : Ce sont les calculs partiels nécessaires avant la transformation de l'expression algébrique : calcul du produit de deux monômes, division d'un coefficient par un autre, mise au même dénominateurs de deux fractions rationnelles, etc.
- Les équations : Ce sont des expressions algébriques impliquant toujours le signe de l'égalité, présent une seule fois par ligne.
- Les résultats : C'est généralement un nombre (entier, rationnel ou non) pouvant contenir un ou plusieurs signes d'état (addition, négation ou division).

Exemple (folio 70a): *Partager 10 en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit égale à 58.*

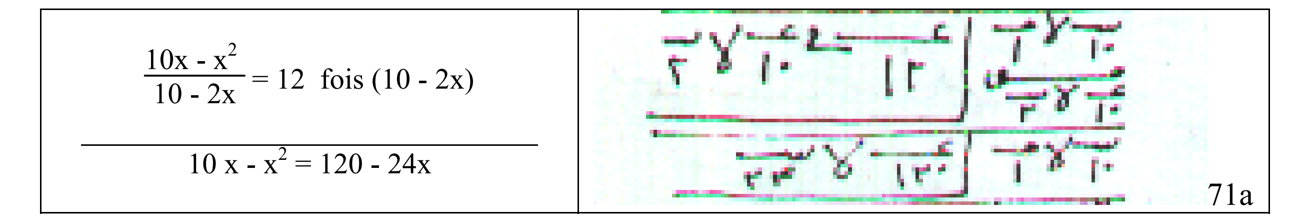
Notation moderne	Notation maghrébine
10	١٠
x 10 - x	شـ١ ١٠عـ لا ١شـ
x fois x 10 - x fois 10 - x	١شـ في ١شـ ١٠عـ لا ١شـ في ١٠عـ لا ١شـ
x^2 plus $100 + x^2 - 20x$	١مـ ١٠٠عـ ١مـ لا ٢٠شـ
$100 + 2x^2 - 20x = 58$	١٠٠عـ ٢مـ لا ٢٠شـ] ٥٨عـ
$100 + 2x^2 = 58 + 20x$	١٠٠عـ ٢مـ] ٥٨عـ ٢٠شـ
$42 + 2x^2 = 20x$	٤٢عـ ٢مـ] ٢٠شـ
$x^2 + 21 = 10x$	١مـ ٢١عـ] ١٠شـ

Le problème se trouve donc ramené à la résolution d'une équation canonique:

5 25 [moins] 21 — 4 sa racine 2 ajoutée à 5 donne 7 2 soustraite de 5 donne 3 Les deux sont solutions du problème **Vérification** 3 fois 3 7 fois7 9 ajouté à 49 58	٥ ٢٥ ٢١ — ٤ جذره ٢ الى ٥ يحصل ٧ ٢ من ٥ يحصل ٣ وكلاهما جواب المسئله امتحان ٣ في ٣ ٧ في ٧ ٩ الى ٤٩ ٥٨

L'articulation entre deux expressions algébriques

Signalons que, dans certaines situations, l'articulation entre deux expressions algébriques est susceptible d'induire le lecteur en erreur. En effet, pour économiser l'usage des signes et éviter de se répéter, le résultat d'un calcul peut devenir lui-même le premier terme d'une nouvelle équation[71], comme le montre l'exemple suivant :

$\frac{10x - x^2}{10 - 2x} = 12$ fois $(10 - 2x)$ — $10x - x^2 = 120 - 24x$	 71a

Cette pratique est systématiquement utilisée par Muhammad al-Bāz, à partir du folio 69b, c'est-à-dire dans toutes les résolutions en écriture symbolique de problèmes où le dénominateur d'une fraction rationnelle doit être éliminé, comme dans l'exemple ci-dessus.

71 Ce type d'enchaînement défectueux est signalé chez les élèves d'aujourd'hui par François Pluvinage, lorsqu'ils écrivent : 5 + 7 = 12 x 4 = 48 . in *Mathématiques et maîtrise de la langue* , Repères IREM, n°39, avril 2000.

2 . 3 L'emploi des symboles dans les situations algébriques

La marge du manuscrit de Jerba contient, environ, trois cents situations algébriques entièrement exprimées à l'aide des symboles algébriques maghrébins. Nous nous proposons de les inventorier, non pas d'une manière exhaustive mais en sélectionnant dans chaque situation un exemple générique susceptible d'éclairer l'emploi des symboles. Comme nous l'avons indiqué plus haut, les situations apparaissant en marge du manuscrit de Jerba, sont intimement liées au texte central rédigé par Ibn Hā'im, nous ne les analyserons donc pas du point de vue épistémologique ni mathématique, mais simplement du point de vue de l'usage des symboles[72]. Dans le choix des exemples génériques, nous essayerons de retenir les situations présentées le plus clairement possible. Lorsque plusieurs situations ne diffèrent que par le choix particulier de coefficients numériques (tantôt entiers, tantôt fractionnaires, et tantôt un mélange de ces différents types de nombres), nous n'en retiendrons qu'un seul, estimant qu'il suffit pour illustrer cette situation.

Dans la première partie de cette section, nous présentons une recension des situations algébriques avec leur traduction en notation moderne et en symboles maghrébins.

Dans la deuxième partie, nous montrerons la manière avec laquelle l'auteur de la marge s'est acquitté pour transcrire en symboles maghrébins certaines résolutions de problèmes : équations indéterminées, extraction de la racine carrée d'une expression algébrique, problèmes sans solution, multiplicité des inconnues et changement de variables.

2.3.1 Les situations algébriques

Les premières notations algébriques apparaissent dès le folio 8b, dans sa marge gauche. Il s'agit de traduire en symboles les formes générales des trois premières équations classiques d'al-Khwārizmi : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$ et $bx = c$. Puis suivent la résolution détaillée des six équations canoniques (folios 9b à 17b), le produit de deux polynômes (folio 37b) et la soustraction de deux polynômes contenant le signe de la négation (folio 56a) et celui de la division (folio 57a).

n°folio et présentation de la situation	Traduction en notation moderne	Notation maghrébine
Folio 8b Equations canoniques 1	$ax^2 = bx$ $ax^2 = c$ $bx = c$	مـ ل شـ مـ ل عـ شـ ل عـ
Folio 9b Résolution d'une équation canonique du premier type	$(2 + \frac{1}{4})x^2 = 9x$ ――― $9 : (2 + \frac{1}{4})$ ――― 36 : 9 ――― 4 est la racine cherchée Le carré est donc 16	مـ مـ شـ ٢ و ١/٤ ل ٩ ――― ٩ على ٢ ١/٤ ――― ٣٦ على ٩ ――― ٤ جذر المال فالمال ١٦

[72] Le *Sharh al-urjūza* est cours d'édition. Nous comptons le faire publier prochainement par l'ATSM à Tunis.

Folio 10a Résolution d'une équation canonique du second type	$3x^2 = 12$ ——— 12 : 3 ——— 4 est la racine Trois carrés sont 12	مـ عـ ٣ ل ١٢ ——— ١٢ على ٣ ——— ٤ جذر المال ثلاثة أموال ١٢
Folio 10a Résolution d'une équation canonique du troisième type	$(3+\frac{1}{6}+\frac{1}{9})\,x = 2+\frac{5}{9}$ ——— $2+\frac{5}{9} : 3+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$ ——— 23 177 dénomme 1242 à partir de 1593 ——— $\frac{46}{59}$ est la racine	شـ عـ ٣ و ١/٦ و ١/٩ ل ٢ و ٥/٩ ——— ٢ و ٥/٩ من ٣ و ١/٦ و ١/٩ ——— ٢٣ ١٧ ١٢٤٢ من ١٥٩٣ ——— ٤٦/٥٩ هو الجذر
Folio 10b Equations canoniques 2	$ax^2 + bx = c$ $ax^2 + c = bx$ $bx + c = ax^2$	مـ شـ ل عـ مـ عـ ل شـ شـ عـ ل مـ
Folio 11b Résolution d'une équation canonique du quatrième type	$x^2 + 10x = 24$ ——— 5 25 24 49 sa racine 7 5 2	مـ سـ عـ ١ ١٠ ل ٢٤ ——— ٥ ٢٥ ٢٤ ٤٩ جذره ٧ ٥ ٢
Folio 14a Résolution d'une équation canonique du cinquième type	$x^2 + 16 = 10x$ ——— 5 moitié 25 son carré moins 16 9 sa racine 3 5 5 3 3 8 2 la plus grande la plus petite	مـ عـ شـ ١ ١٦ ل ١٠ ——— ٥ نصف ٢٥ تربيعه ١٦م ٩ جذره ٣ ٥ ٥ ٣ ٣ ٨ ٢ أكبر أصغر

Folio 17b Résolution d'une équation canonique du sixième type	$x^2 = 4x + 5$ ——— 2 4 5 9 sa racine 3 2 5 est la racine	مـ شـ عـ ١ ٤ ل ٥ ——— ٢ ٤ ٥ ٩ جذره ٣ ٢ ٥ جذر المسألة
Folio 21a Réduction du coefficient de plus haut degré (*hatt*) حـــط	$3x^2 + 10x = 32$ ——— $x^2 + 3\frac{1}{3}x = 10\frac{2}{3}$	مـ شـ عـ ٣ ١٠ ل ٣٢ ——— مـ شـ عـ ١ $\frac{١}{٣}$٣ ل $\frac{٢}{٣}$١٠
Folio 22a Augmentation du coefficient de plus haut degré (*jabr*) جـــبر	$\frac{5}{7}x^2 + 35x = 10$ ——— $x^2 + 49x = 14$	مـ شـ عـ $\frac{٥}{٧}$ ٣٥ ل ١٠ ——— مـ شـ عـ ١ ٤٩ ل ١٤
Folio 26b Suppression du symbole لا dans une équation I	$10x^2 - 2x = 5x$ ——— $10x^2 = 7x$	مـ سـ سـ ١٠ لا ٢ ل ٥ ——— مـ شـ ١٠ ل ١٠
Folio 27b Suppression de deux symboles de la négation لا dans une équation II	$10x^2 - 2x = 10x^3 - 2$ ——— $10x^2 + 2 = 10x^3 + 2x$	مـ سـ كـ عـ ١٠ لا ٢ ل ١٠ لا ٢ ——— مـ عـ كـ سـ ١٠ ٢ ل ١٠ ٢
Folio 32a Simplification par un monôme	$4x^4 = 12x^3$ ——— $4x = 12$	مـمـ كـ ٤ ل ١٢ ——— سـ عـ ٤ ل ١٢
Folio 36b Produit de deux monômes (attention à l'écriture des fractions maghrébines)	$\frac{3}{4}$ fois $\frac{5}{7}x^2$ ——— $(\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7})x^2$	عـ مـ $\frac{٣}{٤}$ في $\frac{٥}{٧}$ ——— مـ $\frac{٣\ \ ٣}{٧\ \ ٤}$

<table>
<tr><td rowspan="2">Folio 37b
Produit de deux polynômes</td><td colspan="2">سـ ٤   مـ ٣   كـ ٥   في   عـ ٤   سـ ٣   مـ ٥   كـ ٦
―――――――――
سـ ١٦   مـ ١٢   كـ ٢٠   مـم ٢٤   مـكـ ١٨   كـكـ ٣٠
١٢   ٩   ١٥   ٢٥
٢٠   ١٥
―――――――――
سـ ١٦   مـ ٢٤   كـ ٤٩   مـم ٥٤   مـكـ ٤٣   كـكـ ٣٠</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(4x + 3x^2 + 5x^3)$ fois $(4 + 3x + 5x^2 + 6x^3)$
―――――――――
$16x + 12x^2 + 20x^3 + 24x^4 + 18x^5 + 30x^6$
$12x^2 + 9x^3 + 15x^4 + 25x^5$
$20x^3 + 15x^4$
―――――――――
$16x + 24x^2 + 49x^3 + 54x^4 + 43x^5 + 30x^6$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Folio 38b
Produit de deux polynômes avec utilisation du symbole de la négation لا</td><td colspan="2">مـ ١   كـ ١   لا   عـ ١٠   سـ ١   في   مـ ٣   عـ ٢٠
―――――――――
كـ ١٧   مـم ٣   مـكـ ٣   لا   سـ ٢٠   مـ ١٠   عـ ٢٠٠</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x^2 + x^3 - 10 - x$ fois $3x^2 + 20$
―――――――――
$17x^3 + 3x^4 + 3x^5 - 20x - 10x^2 - 200$</td></tr>
<tr><td>Folio 39a
Produit d'une fraction rationnelle et d'un binôme</td><td>$\frac{10x + 3x^2}{x + 2}$ fois $4x + 5$
―――――――――
$\frac{50x + 55x^2 + 12x^3}{x + 2}$</td><td>مـ (سـ ١٠   مـ ٣) ق / (سـ ١   عـ ٢)   في   سـ ٤   عـ ٥
―――――――――
مـ (سـ ٥٠   مـ ٥٥   كـ ١٢) ق / (سـ ١   عـ ٢)</td></tr>
<tr><td>Folio 39b
Produit de deux fractions rationnelles</td><td>$\frac{10x}{x + 1}$ fois $\frac{20}{x}$
―――――――――
$\frac{200x}{x + x^2}$</td><td>مـ (سـ ١٠) ق / (سـ ١   عـ ١)   في   مـ (عـ ٢٠) ق / (سـ ١)
―――――――――
مـ (سـ ٢٠٠) ق / (سـ ١   مـ ١)</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Folio 42a
Produit de deux expressions algébriques contenant des fractions rationnelles et des termes négatifs</td>
<td colspan="2">مـ ٥ مـــــق ١٠ سـ / سـ ١ عـ ٢ لا ٣ سـ في ٥ كـ ٣ جـز مـ مـــق ١٥ عـ / سـ ١
————————
١٥ عـ ٧٥ سـ ٢٥ مكـ مـــــق ١٥٠ عـ ٣ جـز سـ ٥٠ ممـ / سـ ١ عـ ٢ لا ٤٥ عـ ٩ جـز سـ ١٥ ممـ</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$5x^2 + \frac{10x}{x+2} - 3x$ fois $5x^3 + 3x^{-2} + \frac{15}{x}$
————————
$15 + 75x + 25x^5 + \frac{150 + 3x^{-1} + 50x^4}{x+2} - 45 - 9x^{-1} - 15x^4$</td>
</tr>
<tr>
<td>Folio 43a
Divisions de monômes</td>
<td>$2x^2 : 10x$
————————
$\frac{1}{5}x$</td>
<td>٢ مـ على ١٠ سـ
————————
١/٥ سـ</td>
</tr>
<tr>
<td>Folio 45a
Divisions
de polynômes I</td>
<td>$10x + 10x^2 : x + 2$
————————
$\frac{10x + 10x^2}{x + 2}$</td>
<td>١٠ سـ ١٠ مـ على ١ سـ ٢ عـ
————————
مـــق ١٠ سـ ١٠ مـ / سـ ١ عـ ٢</td>
</tr>
<tr>
<td>Folio 45a
Divisions
de polynômes II</td>
<td>$20x^2 - 10x : 5x$
————————
$4x - 2$</td>
<td>٢٠ مـ لا ١٠ سـ على ٥ سـ
————————
٤ سـ لا ٢ عـ</td>
</tr>
<tr>
<td>Folio 46a
Divisions d'une fraction rationnelle par un monôme</td>
<td>$\frac{10x^2 - 4x^3}{x} : 3x$
————————
x fois 3x
————————
$10x^2 - 4x^3 : 3x^2$
————————
$\frac{10}{3} - 3\frac{1}{3}x$</td>
<td>مـــق ١٠ مـ لا ٤ كـ / سـ ١ على ٣ سـ
————————
١ سـ في ٣ سـ
————————
١٠ مـ لا ٤ كـ على ٣ مـ
————————
٣ ١/٣ عـ لا ١ ٣/١ سـ</td>
</tr>
</table>

Folio 47b Divisions de deux fractions rationnelles I	$\frac{10}{x^2 - x} : \frac{3x}{x^2 - 3}$ ――――――― $\frac{10x^2 - 30}{3x^3 - 3x^2}$	عـ سـ ١٠ ٣ مـــق على مـــق مـ سـ مـ عـ ١ لا ١ ١ لا ٣ ――――――― مـ عـ ١٠ لا ٣٠ مـــق كـ مـ ٣ لا ٣
Folio 47b Divisions de deux fractions rationnelles II	$\frac{10}{x^2 - x} : \frac{3x}{x^2} - 3$ ――――――― $\dfrac{\frac{10}{x^2 - x}}{\frac{3x}{x^2} - 3}$	عـ سـ عـ ١٠ ٣ مـــق على مـــق لا ٣ مـ سـ مـ ١ لا ١ ١ ――――――― عـ ١٠ مـــق مـ سـ ١ لا ١ مـــــق سـ عـ مـــق ٣ لا ٣ مـ ١
Folio 52a Addition de binômes avec coefficients négatifs	$5x - 3$ ajouté à $3x^2 - x^3$ ――――――― $(5x - 3) + (3x^2 - x^3)$ ――――――― $5x + 3x^2 - 3 - x^3$	سـ عـ مـ كـ ٥ لا ٣ الى ٣ لا ١ ――――――― سـ عـ مـ كـ ٥ لا ٣ و ٣ لا ١ ――――――― سـ مـ عـ كـ ٥ ٣ لا ٣ ١
Folio 53a Addition de fractions rationnelles I	$\frac{10}{x + 1}$ ajouté à $\frac{5}{x + 1}$ ――――――― $\frac{15}{x + 1}$	عـ عـ ١٠ ٥ مـــق الى مـــق سـ عـ سـ عـ ١ ١ ١ ١ ――――――― عـ ١٥ مـــق سـ عـ ١ ١
Folio 53a Addition de fractions rationnelles II	$\frac{5}{x^3}$ ajouté à $\frac{4x^3}{x + 1}$ ――――――― $\frac{5}{x^3} + \frac{4x^3}{x + 1}$	عـ كـ ٥ ٤ مـــق الى مـــق كـ سـ عـ ١ ١ ١ ――――――― عـ كـ ٥ ٤ مـــق و مـــق كـ سـ عـ ١ ١ ١

Folio 56a Soustraction de polynômes avec coefficients négatifs	$(10x + 4 - x^2)$ de $(8x + 20 + 2x^2)$ ——— $(10x + 4)$ de $(8x + 20 + 3x^2)$ ——— $2x$ de $(16 + 3x^2)$ ——— $(16 + 3x^2) - 2x$	سـ عـ مـ سـ عـ مـ ١٠ ٤ لا ١ من ٨ ٢٠ ٢ ——— سـ عـ سـ عـ مـ ١٠ ٤ من ٨ ٢٠ ٣ ——— سـ عـ مـ ٢ من ١٦ ٣ ——— عـ مـ سـ ١٦ ٣ لا ٢
Folio 57a Soustraction de fractions rationnelles I	$\frac{10}{x+2}$ soustrait de $\frac{20}{x+2}$ ——— $\frac{10}{x+2}$	عـ عـ مـ١٠ـق من مـ٢٠ـق سـ عـ سـ عـ ١ ٢ ١ ٢ ——— عـ مـ١٠ـق سـ عـ ١ ٢
Folio 57a Soustraction de fractions rationnelles II	$\frac{10x}{x+2}$ soustrait de $\frac{10x^2}{x+2}$ ——— $\frac{10x^2 - 10x}{x+2}$	سـ مـ مـ١٠ـق من مـ١٠ـق سـ عـ سـ عـ ١ ٢ ١ ٢ ——— مـ سـ مـ١٠ لا ١٠ـق سـ عـ ١ ٢
Folio 57a Soustraction de fractions rationnelles III	$\frac{10}{x}$ soustrait de $\frac{20}{x+2}$ ——— $\frac{20}{x+2} - \frac{10}{x}$	عـ عـ مـ١٠ـق من مـ٢٠ـق سـ سـ عـ ١ ١ ٢ ——— عـ عـ مـ٢٠ـق لا مـ١٠ـق سـ عـ سـ ١ ٢ ١

2.3.2 La résolution de certains problèmes

S'inspirant à la fois d'al-Karāji et d'ibn al-Bannā, Ibn al-Hā'im, dans *Sharḥ al-urjūza,* traite de nombreuses situations problématiques : les problèmes impossibles, le changement de variable, l'extraction de la racine carrée et la multiplicité des inconnues. Nous nous proposons de décrire la manière dont Muhammad al-Bāz présente ces situations dans la marge du manuscrit.

<u>Des problèmes impossibles</u>

Comme al-Karāji, Ibn al-Hā'im étudie dans un paragraphe, (65a-66b), les conditions qui font qu'un problème algébrique puisse avoir des solutions. Ce qui nous intéresse, en termes de notations, c'est la manière dont l'auteur de la marge représente symboliquement l'impossibilité d'un problème : il développe la solution algébrique proposée dans le texte central sous forme rhétorique. Aboutissant à une équation, il constate son impossibilité. Les exemples suivants montrent que la présence d'une solution négative est une cause principale d'impossibilité :

n°folio	Traduction en notation moderne	Notation maghrébine
Folio 65a Equation impossible I	2 = 10 impossible	ع١٠ ل ع٢ محال

Suivent les trois autres énoncés menant eux aussi à des impossibilités, nous les retrouvons dans la marge du folio 65b de la manière suivante :

ع٢ س٦/٧ ل ع١٠ ٩ ١/٣ جذر المسألة . و سبعه اقل من درهمين ، فهو محال.	س١ لا ع١٠ من ع١٠ لا س١ هذه المسألة مستحيلة إلا ان يفرض الشيء عشرة ، المعنى اطرح لا شيء من لا شيء	ع١٠ ل س١/٦ محال .
Soustraire ($\frac{1}{4}$ x – 2) de x et égaler le résultat à $\frac{6}{7}$x. Les calculs donnent x = $9\frac{1}{3}$. La Marge ajoute : "le septième <de la solution> est inférieur à deux. C'est impossible".	Soustraire x - 10 de 10 - x. En effectuant les calculs, on trouve 20 – 2x. « *Ce problème est impossible, car il présuppose que x = 10, ce qui revient à dire "soustraire 0 de 0"* ». Les deux points surlignant et soulignant les expressions indiquent que tous les calculs effectués sont hypothétiques.	Soustraire ($\frac{1}{2}$ x - 10) de $\frac{1}{3}$ x et égaler le résultat à 20. Les calculs ramènent à l'équation $0 = 10 + \frac{1}{6}$x. La Marge ajoute "*Muhāl",* c'est-à-dire impossible.

Les équations indéterminées

Dans ce paragraphe (folios 64a-65a), Ibn al-Hā'im traite des équations indéterminées à la manière d'al-Karāji, par la méthode dite du tâtonnement (*al-Istiqrā*). Ce qui nous intéresse ici, c'est la représentation symbolique que l'on trouve à la marge. En règle générale, on trouvera au second membre de l'équation indéterminée le terme مربع (*murabba*[c] = un carré), lequel sera remplacé successivement par un entier carré ou le carré d'un binôme, ce qui permet de trouver une solution particulière de l'équation.

n°folio	Traduction en notation moderne	Notation maghrébine
Folio 64a Equation indéterminée I	$x^2 + 4x$ = un carré ——— $x^2 + 4x = 4x^2$ ——— $4x = 3x^2$ $1\frac{1}{3}$ est la solution de l'équation	مـ سـ ١ ٤ ل مربعا ——— مـ سـ مـ ١ ٤ ل ٤ ——— سـ مـ ٤ ل ٣ ١ ١/٣ هو جذر المسألة
Folio 64b Equation indéterminée II	$x^2 + 4x$ = un carré ——— $x^2 + 4x = \frac{9}{4}x^2$	مـ سـ ١ ٤ ل مربعا ——— مـ سـ مـ ١ ٤ ل ٢ ١/٤
Folio 64b Equation indéterminée III	$x^2 + 4x$ = un carré ——— $x^2 + 4x = x^2 + 1 - 2x$	مـ سـ ١ ٤ ل مربعا ——— مـ سـ مـ عـ سـ ١ ٤ ل ١ ١ لا ٢
Folio 64b Equation indéterminée III	$x^2 + 4x$ = un carré ——— $x^2 + 4x = x^4 + 2x + 1 - 2x^3 - x^2$	مـ سـ ١ ٤ ل مربعا ——— مـ سـ مـمـ سـ عـ كـ مـ ١ ٤ ل ١ ٢ ١ لا ٢ ١

Le changement de variable dans la marge

Le concept de changement de variable est présent dans le texte central sous les formes suivantes :

- pour passer de l'équation $x^4 + 5x^2 = 126$ à l'équation $X^2 + 5X = 126$, Ibn al-Hā'im dit : "*remplace les carrés carrés par des carrés et les carrés par des choses*" (folio 32b, ligne 23).
- pour résoudre l'équation $x^4 + 2x^3 = x + 30$, Ibn al-Hā'im propose d'ajouter de part et d'autre x^2. On trouve alors $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + x + 30$ et on constate que $x^4 + 2x^3 + x^2$ est le carré de $x^2 + x$. Il résout l'équation $X^2 = X + 30$ et dit alors : « *Comme la solution de cette dernière équation est égale à 6 et qu'elle a pris la place de $x^2 + x$, nous devons résoudre une deuxième équation : $x^2 + x = 6$, ce qui entraîne que la solution du problème initial est égale à 2* ». (folio 34a). Cette

procédure est laborieuse et difficile à suivre[73]; ce qui amène Muhammad Hamūd al-Bāz à tenter de l'expliquer beaucoup plus clairement en ajoutant dans la marge un long commentaire, qu'il termine par une représentation symbolique assez confuse, les mêmes lettres étant utilisées dans les deux situations. En écriture moderne, cela donnerait :

$x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + x + 30$ ——— $x^2 = x + 30$	ع ٣٠ س ١ ص ١ ص ١ ك ٢ مم ١ ——— ع ٣٠ س ١ ص ١ (34a)

On passe d'une équation à l'autre sans aucune explication; l'inconnue est identique, mais elle change de statut d'une manière abrupte; pour pouvoir s'y retrouver, on doit nécessairement recourir au texte central.

Un autre problème d'Ibn al-Hā'im (folio 71a, ligne 16) fait intervenir dans une de ses sept solutions proposées un changement de variable. En termes modernes, il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

Ce problème avait déjà été proposé par al-Khwārizmi[74] et repris par al-Karāji III-10 (Saydan, p.211), puis légèrement modifié par ibn al-Bannā (Saydan, p.562). Ibn al-Hā'im, comme ses prédécesseurs al-Karāji et ibn al-Bannā, expose plusieurs manières de résoudre ce problème en reprenant en particulier celle du dernier qui fait appel à un changement de variable $X = \frac{10 - x}{x}$. C'est ce que l'on retrouve repris dans la marge où د ١ remplace toute l'expression ع ١٠ لا س ١ على س ١ .

<u>L'extraction de la racine carrée</u>

Dans certaines situations, les expressions algébriques notées dans la marge en écriture symbolique sont incompréhensibles sans recours au texte central. Dans pareils cas, les formules utilisées par l'auteur de la marge illustrent le texte et le complètent, tout en aidant à mieux fixer dans la mémoire du lecteur les objets mathématiques concernés. C'est ce qui se passe pour les expressions suivantes où l'expression de la deuxième ligne correspond à la racine carrée de celle de la première ligne. Exemples :

ع ٨ و ج ٦٠ / ج ٥ و ج ٣ (61a) ; م ٩ / س ٣ (63a)

(ce qui correspond à $\frac{8 + \sqrt{60}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ et $\frac{9x^2}{3x}$) et pour les polynômes :

$4x^6 + 8x^5 + 12x^4 + 16x^3 + 12x^2 + 8x + 4$ ——— $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$	ع ٤ س ٨ ص ١٢ ك ١٦ مم ١٢ مك ٨ كك ٤ ——— ع ٢ س ٢ ص ٢ ك ٢ (63b)

---

[73] Elle reprend en fait la méthode proposée pour ce problème par ibn al-Bannā, voir Saydan page 555.

[74] Cité par Sesiano, *Une introduction…* , texte arabe page 153 et traduction française page 64.

La multiplicité des inconnues

Dans le problème ci-dessus illustré, il s'agit de l'achat d'un cheval par trois personnes. On doit retrouver la somme payée par chaque acheteur ainsi que le prix du cheval.

Le problème se ramène à trouver x , y et z vérifiant :

$x + \frac{1}{2}(y + z) = y + \frac{1}{3}(z + x) = z + \frac{1}{4}(x + y)$.

La marge suit le texte central et pose سـ ١ la première inconnue, د ١ la deuxième et donne à la troisième inconnue la valeur numérique عـ ٣ (*i.e.* 3). La mise en équation fait apparaître deux manières de calculer le prix de l'animal :

١ سـ ١/٢ د ١/٢ عـ ١ et ١ د ١ عـ ١/٣ سـ

($x + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$ et $y + 1 + \frac{x}{3}$).

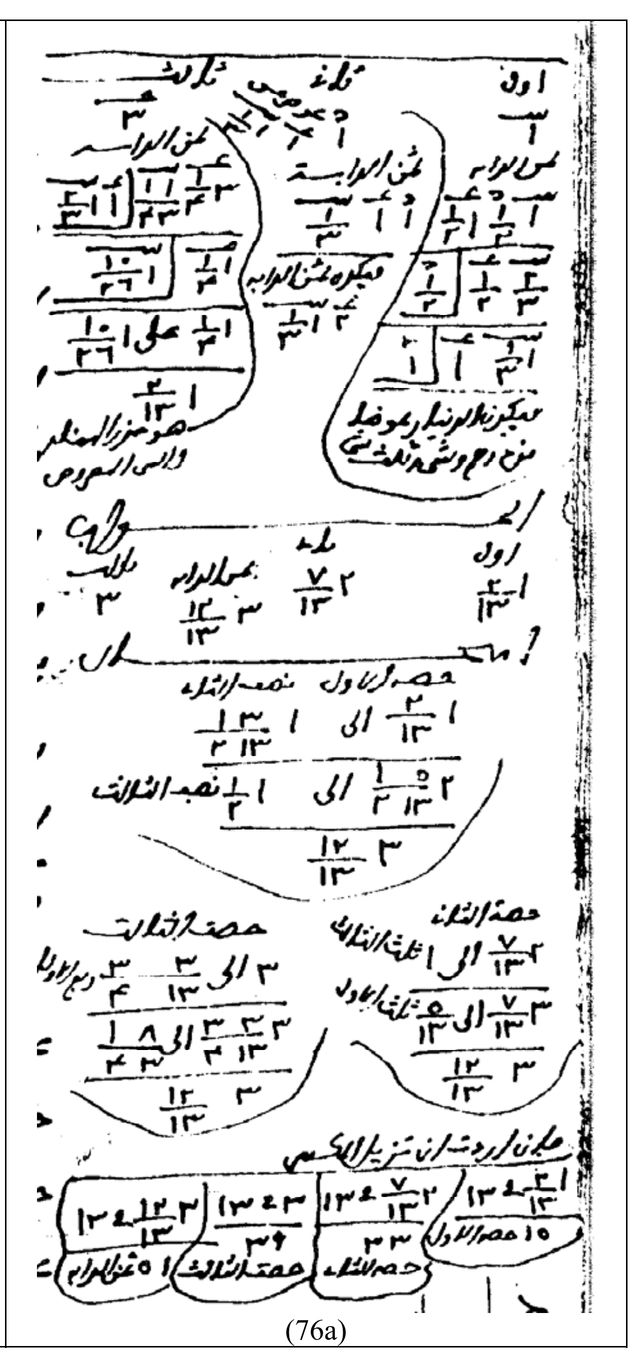
L'égalité de ces deux équations permet d'obtenir l'équation ٢/٣ سـ ١/٢ عـ ١/٢ د ($\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}y$),

d'où la possibilité de remplacer د ١ par ١ عـ ١ ١/٣ سـ (remplacer y par $1 + 1\frac{1}{3}x$) .

La Marge termine les calculs et donne les solutions $x = 1\frac{2}{13}$, $y = 2\frac{7}{13}$ et z = 3. Le prix de l'animal étant égal à $3\frac{12}{13}$.

Remarquer, à la fin de l'exercice une vérification que l'on ne trouve pas dans le texte central.

Par contre la marge suit le texte central, lorsqu'il s'agit d'exprimer les valeurs trouvées en entiers naturels : x = 15 ; y = 33 ; z = 39 , le prix du cheval étant égal à 51.



(76a)

Ce type de problèmes fait intervenir plusieurs inconnues, Abu Kāmil et ses successeurs différentient ces inconnues en leur donnant divers noms, *Shay* étant réservé à la première et *Dinār* à la seconde[75]. C'est cette convention que l'on retrouve ici dans le texte central. Nous constatons, sur l'exemple ci-dessus, que Muḥammad al-Bāz suit littéralement ibn al-Hā'im en associant à la deuxième inconnue la lettre د initiale du terme دينار.

[75] L'énoncé d'Ibn al-Hā'im est celui que l'on trouve dans Ibn Bannā (Cf. Saydan, problème n°4, page 571). On le trouve déjà dans une forme proche dans Diophante (I-24) et al-Karāji (III-26) (Cf. Sesiano, page 121)

2 . 4 Compétences mathématiques de l'auteur de la marge

L'étude du manuscrit de Jerba nous amène à nous poser la question de savoir si l'auteur de la marge était un simple scribe chargé de reproduire un manuscrit plus ancien, le recopiant aveuglément sans y apporter une quelconque contribution personnelle significative ou s'il s'agit là d'un mathématicien confronté à un ouvrage, certes pédagogique, qu'il commence par reproduire et dont il traduit les énoncés mathématiques en écritures symboliques. Pour tenter de répondre à cette question, nous avons confronté le texte central (le traité d'Ibn al-Hā'im) au contenu de la marge et nous nous sommes posés les questions suivantes :

- Les erreurs du texte central sont-elles corrigées dans la version symbolique ou sont-elles retransmises telles qu'elles?
- La marge comporte-t-elle des erreurs que l'on ne retrouve pas dans le texte ?
- Y a-t-il dans la marge des développements mathématiques absents du texte central et vice et versa?

A ces questions, nous donnons des réponses nuancées, documentées par divers exemples.

1. <u>La Marge conserve les erreurs du texte central</u>

Dans le folio 41b, Ibn al-Hā'im effectue la multiplication de $20 - \frac{3x^2}{x}$ par $\frac{20}{x} - 3x^2$ et trouve $9x^2 + \frac{20}{x} - 60x - 60x^2$. Ce résultat est erroné puisque l'expression doit commencer par $9x^3$.
Sans suivre littéralement le texte central, l'auteur de la marge trouve un même résultat erroné identique à celui du texte central.

2. <u>L'auteur de la marge commente une explication rhétorique du texte central et l'illustre ensuite par l'intermédiaire d'une écriture symbolique</u>

Cela se passe dans la marge du folio 36b, où l'auteur de la marge commente le texte central en utilisant sa formule introductive habituelle وقوله "*Wa qawluhu* … = quant à sa formulation …" et termine son commentaire marginal par فصورته "Fa *suratuhu* = alors sa représentation est" suivie d'une formule écrite en symboles algébriques maghrébins.

3. <u>L'auteur de la marge présente maladroitement une technique pourtant bien expliquée par Ibn al-Hā'im</u>

Dans le folio 23b, Ibn al-Hā'im cite les vers n° 38 et 39 de la *Urjūza* d'Ibn al-Yāsamīn évoquant un algorithme particulier de résolution des équations du second degré sans utiliser la division par le coefficient dominant des coefficients de l'équation donnée. Avec les notations modernes, il s'agit par exemple de résoudre: $ax^2 + bx = c$. Pour cela,

- on commence par multiplier la constante c par le coefficient dominant a .
- on résout l'équation auxiliaire $x^2 + bx = ac$.
- sa racine est dénommée par Ibn al-Yāsamin lui-même : نظير الجـذر (*Nadhīr al-jidhr* = la racine auxiliaire). Sa valeur est donc $x_0 = -\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + ac}$.
- on divise par le coefficient a la valeur auxiliaire x_0 obtenue.
- La solution cherchée de l'équation initiale est donc : $x_1 = \frac{x_0}{a}$.

L'auteur de la marge traduit cet algorithme par une représentation symbolique bizarre et trompeuse : en effet, l'équation initiale $ax^2 + bx = c$, où $a = 2 + \frac{1}{2}$, $b = 10$ et $c = 150$, est suivie d'une équation

transformée : $ax^2 + bx = ac$, puis de l'algorithme de la solution de la première équation. Comme aucune explication n'est donnée, le lecteur ne comprend pas ce qui se passe. Il y a là rupture de la convention syntaxique, la seconde équation n'étant pas obtenue à partir de la première par une transformation acceptable. Pour pouvoir comprendre la notation symbolique, il faut retourner au texte central. Cette manière confuse de procéder est répétée, gardant la même erreur, dans les folios 24b , 25a et 25b. En fait Muhammad al-Bāz n'a pas compris l'originalité de la démarche[76].

4. <u>L'auteur de la marge modifie le texte central ou le corrige</u>

Dans *Sharḥ al-Urjūza*, Ibn al-Hā'im s'est peu trompé dans ses calculs algébriques. Nous avons retenu quatre erreurs banales, dont deux sont signalées par l'auteur de la marge et deux autres sont reprises telles qu'elles par lui.

Dans le folio 37a, Ibn al-Hā'im énonce que "*trois parts du cube multipliés par quatre cubes égalent une part de douze"*. Cette erreur est répétée par la suite. L'auteur de la marge fait la remarque suivante : "*Il est clair que son emploi de [l'expression] "part de", ici et dans les expressions qui suivent, est une substitution [du terme] nombre, car le cube a été multiplié par son inverse, comme vu [plus haut]*"[77]. Malgré cette remarque correctrice, la transcription en symboles algébriques de cette expression est, elle aussi, erronée. Cela pourrait signifier que l'auteur de la marge commence d'abord par transcrire le texte central en notations symboliques, pour refaire ensuite les calculs et corriger les erreurs éventuelles.

$\frac{3}{x^3}$ fois $4x^3$	جـــز كـــ ٣ في كـــ ٤
$\frac{1}{12}$	جـــز ١٢

Au bas du folio 47b, la Marge propose, en notation symbolique, deux exemples absents du texte central, mais le scribe se trompe dans l'énoncé de l'un des deux exemples. Dans la suite de ses calculs en écriture symbolique, l'erreur disparaît.

Au folio 56b (ligne 18), pour soustraire $10x^2 - 10x$ de $60x - 40$, Ibn al-Hā'im propose d'ajouter aux deux expressions $10x + 40$. L'auteur de la marge effectue l'opération, mais se trompe en soustrayant $10x^2 - 10x$ de $70x^2$ au lieu de la soustraire de $70x$. L'erreur disparaît dans la ligne suivante.

Dans le folio 68b, au début de la résolution d'un problème, l'auteur de la marge se trompe en écrivant $2\sqrt{x^2 + 3x} = x$ au lieu de $2\sqrt{x^2 + 3x} = 3x$. Mais la suite est correcte.

---

[76] Cet algorithme est explicite dans al-Fakhri d'al-Karāji qui recommande son emploi lorsque les coefficients sont des fractions différentes et nombreuses (*kusūrun mokhtalifah kathīra*). Al-Karāji démontre géométriquement la validité de l'algorithme à partir de plusieurs cas numériques (Saydan, page 149-163). Ibn al-Yāsamīn utilise abondamment cet algorithme dans *Kitāb Talqīḥ al-afkār* sur plusieurs cas numériques (folios 152 à 158). Son originalité, dans *al-Urjūza al-Yāsiminīya*, c'est que, grâce à une formule lapidaire, il associe à cet algorithme les concepts d'équation et de racine auxiliaires. Le même algorithme est explicite dans *Kitāb al-jabr wal muqābala* d'ibn al-Bannā. Cependant, ce dernier l'énonce dans sa généralité sans l'appliquer sur des cas numériques et sans démonstration (Saydan, pages 549 à 554). L'apport d'Ibn al-Hā'im, c'est d'avoir reconnu l'originalité du concept d'équation auxiliaire et d'avoir décrit parfaitement l'algorithme et justifié son emploi. Ibn Qunfudh al-Qusantini, dans *Ḥaṭṭ an-niqāb ᶜan wujūh 'aᶜmāl al-ḥisāb*, consacre un paragraphe pour cet algorithme, qu'il considère "*général, ne nécessitant pas de réduction à l'unité*". Pour chaque type d'équation quadratique, il commence par énoncer l'algorithme dans sa généralité, puis il l'illustre par un exemple (page 199, puis 201 et 204). Ibn al-Ghāzi et al-Māridini énoncent l'algorithme dans sa généralité et l'illustrent sur plusieurs exemples numériques.

[77] Citation dans la marge de *Sharḥ al-Urjūza :*

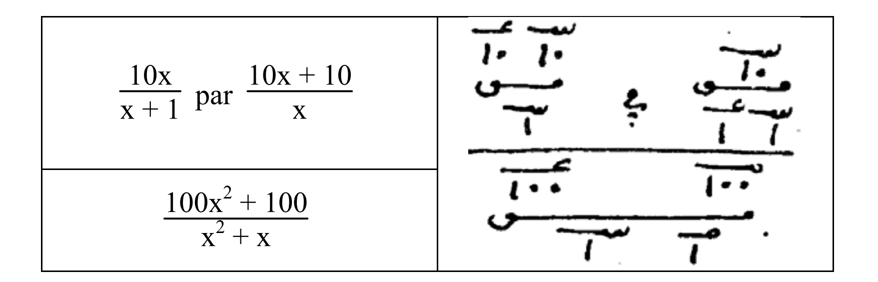
"الظاهر أن قوله جزءا هنا و فيما يأتي محرف عن عدد ، لان الكعب ضرب في أجزاء واحد ، كما ترى "، صفحة 37b

Ces trois derniers exemples pourraient nous donner à penser que l'auteur de la marge recopie les expressions algébriques en notations symboliques à partir d'une autre copie et que, ce faisant, il introduit par inattention des erreurs de copie., mais nous pensons que cela est peu probable.

5. Des développements dans la marge, absents du texte central

Dans le folio 38a, l'auteur de la marge termine un calcul commencé par ibn al-Hā'im; toutefois, en marge du folio 38b, l'agencement des calculs diffère de celui du texte central.

Dans le folio 40a, Ibn al-Hā'im énonce directement le résultat de la multiplication de $\frac{10x}{x+1}$ par $\frac{10x+10}{x}$ qu'il trouve égal à 100. L'auteur de la marge commence par détailler l'opération et introduit une erreur dans le résultat :



$\frac{10x}{x+1}$ par $\frac{10x+10}{x}$	
$\frac{100x^2+100}{x^2+x}$	

Constatant que ce résultat est différent de celui du texte central, l'auteur de la marge reprend entièrement tous les calculs et arrive au bon résultat.

A partir du folio 66a, Ibn al-Hā'im illustre une typologie des problèmes par treize énoncés sans s'occuper de leur mise en équation, ni en donner la solution. On trouve dans la marge tous ces énoncés suivis de leur solution complète écrite sous forme symbolique.

A partir du folio 67a, Ibn al-Hā'im propose vingt-un nouveaux énoncés dont il se contente de choisir l'inconnue ou les inconnues, ou qu'il met simplement en équation sans résoudre le problème. On trouve dans la marge tous ces énoncés suivis de leur solution complète écrite sous forme symbolique.

Ibn al-Hā'im traite par la suite complètement une quarantaine de problèmes (énoncé, traitement et solutions). L'auteur de la marge présente tous ces problèmes et les résout en écriture symbolique.

Tout ce que nous venons de rapporter conforte l'affirmation que Muḥammad al-Bāz possède une compétence mathématique suffisamment sure pour lui permettre de résoudre en détail et sous forme symbolique dynamique des problèmes de types divers.

6. L'auteur de la marge illustre deux versions d'un même problème

Le problème qui suit est énoncé par Ibn al-Hā'im, sans en donner de solution. Muḥammad al-Bāz signale au lecteur (sous forme d'un commentaire situé dans la marge) que dans une autre copie du même traité, ce problème possède une autre version. Il s'agit d'un problème se ramenant à la résolution de l'équation $x(x + 2) = 20$ dans un cas, et à la résolution de l'équation $x(x + 2) = 24$ dans l'autre cas. L'auteur de la marge va proposer une solution complète suivie d'une vérification pour chacune des deux versions. Nous allons énoncer les deux versions traitées dans la marge, et reproduire les solutions trouvées.

Folio 67a, ligne 9 *Deux nombres sont donnés tels que leur différence est 2. Le produit de l'un par l'autre est égal à 20. Quels sont ces nombres.* Ibn al-Hā'im suggère de poser Shay l'un des deux nombres et Shay plus deux l'autre. Il s'agit donc de résoudre l'équation $x(x + 2) = 20$.	$x^2 + 2x = 20$	مـ سـ عـ ١ ٢ ٢٠ لـ
	La solution trouvée en marge est $\sqrt{21} - 1$. L'autre solution étant $\sqrt{21} + 1$.	جـ عـ ٢١ لا ١ هو جذر المسألة وهو الشيء المفروض ، فالثاني جـ عـ ٢١ و ١
	Vérification $\sqrt{21} - 1$ fois $\sqrt{21} + 1$ $(\sqrt{441} + \sqrt{21}) - (\sqrt{21} + 1)$ $\sqrt{221} - 1$ 21 – 1 20	**امتحان** جـ عـ جـ عـ ٢١ لا ١ في ٢١ و ١ جـ جـ جـ عـ ٤٤١ ٢١ لا ٢١ ١ جـ عـ ٤٤١ لا ١ عـ ٢٠
Folio 67a Même énoncé que le précédent avec une constante égale à 24. Il s'agit donc de résoudre l'équation $x(x + 2) = 24$. Cet énoncé est absent du texte central, mais ne se trouve que dans la marge.	$x^2 + 2x = 24$	مـ سـ عـ ١ ٢ ٢٤ لـ
	La solution trouvée par la Marge est 4. L'autre solution étant 6.	عـ ٤ هو الجذر في المسألة وهو الشيء المفروض ، فالثاني ستة

L'étude détaillée que nous venons de présenter montre que l'auteur de la marge, tout en étant parfois distrait (conservant une erreur mathématique du texte central ou essayant d'expliquer maladroitement une technique de calcul), contribue systématiquement à clarifier le texte central, soit sous le mode rhétorique pur à travers un commentaire, soit sous le mode symbolique dynamique, soit une combinaison des deux modes. Muḥammad al-Bāz n'hésite pas à modifier le texte central, à le corriger, à développer en notations symboliques des raisonnements simplement esquissés ou même ignorés dans le texte central. Nous avons constaté qu'il consultait d'autres copies du manuscrit et lorsqu'une deuxième copie était différente de la première, il proposait une solution en symboles à la nouvelle version. Toutes ces considérations permettent de conclure que Muḥammad al-Bāz possédait au moment où il a reproduit le traité d'ibn al-Hā'im, une culture mathématique certaine et une habileté à manier les symboles maghrébins.

Conclusions et perspectives

Lorsque nous avons découvert le manuscrit de Jerba, nous avons été tellement impressionné par le grand nombre de symboles algébriques qui y figuraient, leur clarté et leur beauté intrinsèque, que nous avons proposé d'illustrer l'affiche et la couverture des *Actes du deuxième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* par l'une des pages de ce manuscrit. Mais, c'est la lecture récente de la thèse de doctorat d'Ahmed Djebbar (Nantes 1988) qui nous a incité à approfondir notre connaissance de ces symboles. Nous nous sommes alors posé plusieurs questions :

- En ce qui concerne les symboles maghrébins : Où en est la recherche sur ce thème? Connaît-on la genèse de ces symboles? Peut-on en présenter une typologie précise? Quelle est la place tenue par ce formalisme pour faciliter le raisonnement algébrique, systématiser les calculs et résoudre plus efficacement des problèmes?
- En ce qui concerne le manuscrit de Jerba : Quel en est l'historique et qui en est l'auteur? Comment et dans quel but y utilise-t-on les symboles maghrébins?

L'étude que nous venons de terminer permet de répondre à certaines de ces questions et à ouvrir des voies pour de nouvelles recherches.

1. D'abord, il est clair que peu de travaux se sont intéressés aux symboles maghrébins pour eux-mêmes. Woepke a été précurseur en 1854; son travail sur les symboles d'al-Qalaṣādi a été repris par Cajori, mais il faut attendre un siècle pour que ces symboles fassent l'objet de l'attention de quelques chercheurs maghrébins contemporains : Mohamed Souissi, Ahmed Djebbar et Driss Lamrabet. Ces deux derniers montrent pour la première fois que les symboles maghrébins étaient utilisés antérieurement à al-Qalaṣādi et Ahmed Djebbar tente d'ébaucher une étude d'un point de vue épistémologique; cependant, leurs travaux n'ont pas été répercutés par les historiens modernes de l'algèbre - tels Berggren (1986), Sesiano (1999) ou même Serfati dont la thèse sur les symboles mathématiques occulte l'apport maghrébin dans ce domaine. Il nous semble donc qu'il reste beaucoup à faire pour mieux faire connaître les symboles maghrébins.

2. Nous avons vu, que l'adoption au Maghreb de l'arithmétique indienne, *ḥisāb al-ghubār,* s'est accompagnée de l'introduction d'un outil de calcul, la *lawha*, planche sur laquelle on écrit avec un stylet trempé dans l'encre et que l'on peut effacer, remplaçant ainsi le *takht*, la planche à poussière d'origine indienne. L'introduction des symboles arithmétiques (entiers et fractions), mais aussi algébriques a été progressive et s'est consolidée au fur et à mesure avant de se stabiliser définitivement au quinzième siècle. Après avoir présenté les témoignages que nous possédons, nous avons conclu que la symbolique algébrique arabe est essentiellement maghrébine.

3. Nous avons distingué trois étapes dans l'introduction de l'écriture symbolique maghrébine:

- La première correspond à un usage intensif de la *lawha* pour tous les calculs initiaux et intermédiaires : Le recours aux initiales de l'inconnue (*Shay*) et de ses puissances pour les représenter sur la *lawha* est une nécessité graphique, ayant pour but d'abréger l'expression et de la synthétiser. Les symboles de base (chiffres *ghubār* et signes associés aux inconnues) sont d'abord regroupés sur la planche à calcul en un assemblage correspondant à une expression arithmétique ou algébrique. Le calculateur transforme alors cette expression en utilisant l'une des opérations (addition, soustraction, multiplication, division, mise au même dénominateur, simplification, extraction de la racine carrée, …) et travaille directement sur la planche à calcul. Une fois les calculs terminés, il recopie le résultat tel quel sur la parchemin en le précédant de l'expression *wa suratuhu* (sa représentation), image exacte de ce qui est inscrit sur la planche à calculer. Nous avons signalé cette manière de procéder chez ibn al-Yāsamīn et paradoxalement, dans la première oeuvre d'al-Qalaṣādi. Dans cette étape, peu d'assembleurs sont nécessaires; en fait, les seuls utilisés sont les assembleurs à une place, ـشـ ,

مـ , كـ et جـ , initiales des inconnues (chose, carré et cube) et du *jidhr* (le radical) et subsidiairement le signe de la soustraction, ceux-là mêmes que l'on avait à écrire sur la *lawha* pour identifier l'inconnue. Nous avons vu que la possibilité de se tromper, d'effacer des résultats intermédiaires et de remplacer un coefficient par un autre est signalée de temps en temps.

- La deuxième étape correspond à l'apparition, dans les textes, des assembleurs à deux places pour séparer les nombres ou les expressions polynomiales, l'identification de chaque opération par un signe univoque et l'utilisation du signe de l'égalité. Nous retrouvons ce type d'assemblages dans les textes écrits à partir du 14ème siècle. Il s'agit d'une symbolique syncopée à caractère d'illustration, toujours introduite par l'expression : *wa suratuhu* ; son rôle essentiel est d'éclairer le texte et de le rendre accessible du premier coup d'œil et elle peut éventuellement être ignorée car elle n'est pas indispensable à la compréhension du texte rhétorique. Ce sont donc des symboles d'illustration et non de substitution.

- La troisième étape correspond à la production de textes symboliques totalement autonomes et dynamiques, qui, pour leur lecture ne nécessitent plus de recours au texte rhétorique. Ces textes symboliques utilisent un système clos de symboles, constitué des chiffres *ghubār* et en Egypte de chiffres arabo – indiens) et de quelques lettres arabes, et soumis à une syntaxe bien établie :
    - un assemblage par ligne représentant la mise en équation du problème, une expression algébrique, une équation, un calcul intermédiaire, l'algorithme de résolution d'une équation canonique ou le résultat d'un calcul,
    - une hiérarchie des assembleurs,
    - des *vincula* délimitants pour les inconnues, les radicaux et la division,
    - des séparateurs entre deux assemblages successifs,
    - la lecture du haut vers le bas

  Ce type d'écriture symbolique autonome apparaît timidement au 14ème siècle chez ibn Ghāzi avec le problème de Sebta. Il ne s'agit plus ici de symboles d'illustration, mais bien d'un texte symbolique de substitution, aucun texte rhétorique ne l'accompagnant. La marge du manuscrit de Jerba est un témoignage éloquent de ce type d'utilisation de l'écriture symbolique maghrébine.

4. En nous inspirant des travaux de Nesselmann (1842) et de Serfati (1997), nous avons proposé une typologie des textes algébriques arabes du point de vue de l'usage des symboles et en utilisant le manuscrit de Jerba, nous avons décrit le plus minutieusement possible ces symboles, essentiellement d'un point de vue syntaxique. Cette analyse nous amène à constater une similitude troublante entre les symboles maghrébins avec ceux en usage à partir du 14ème siècle en Europe. Par ailleurs, certains indices signalés par Boncompagni (1851) d'une part, et par Karpinski (1915) d'autre part, montrent l'apparition dans les premières traductions latines de l'algèbre d'al-Khwārizmi, de symboles étonnamment proches dans leur inspiration et leur syntaxe, de l'écriture symbolique maghrébine. Une recherche plus approfondie pourrait aider à mieux cerner les liens éventuels entre ces deux manières d'écrire l'algèbre.

5. Le copiste du manuscrit de Jerba, Muḥammad al-Bāz at-Tunūsi, qui suivait, vers 1745, des enseignements d'algèbre à Istambul sous la tutelle de son professeur Sidki Mustapha, avait une parfaite maîtrise de l'utilisation de l'écriture symbolique maghrébine. Nous avons indiqué qu'à Istambul, un autre enseignant, Ibrāhim al-Ḥalabi, utilisait aussi dans ses notes les symboles algébriques maghrébins. Malgré ces bribes d'informations, notre connaissance de l'utilisation de ces symboles, entre le 15ème et le 18ème siècles, tant au Maghreb qu'en Egypte ou à Istambul, reste lacunaire et nécessiterait d'autres recherches.

Je remercie Jacques Sesiano pour ses précieux conseils.

Bibliographie

Aballagh Mohamed et Djebbar Ahmed, (2001), *Ḥayāt wa mu'allafāt ibn al-Bannā al-marrākushi*, Rabat : Publication de la Faculté des lettres, n°29.

Aballagh Mohamed, *Raf^{c} al-ḥijāb d'ibn al-Bannā, Thèse de doctorat, Université de Paris 1, 1988.*

Al-Karāji, *al-Badī^{c} fil ḥisāb,* Edition de Adel Anbouba, Université libanaise, Beyrouth, 1964.

Al-Qalaṣādi, *at-Ṭabsira al-Wādhiḥa fi Masā'il al-'a^{c}dād al-lā'iḥa,* pré-édition de Hmida Hedfi, Tunis, 1994.

Al-Qalaṣādi, *Kashf al-asrār ^{c}an ^{c}ilm ḥuruf al-ghubār*, édition de Mohamed Souissi, Maison Arabe du Livre, Tunis 1988.

Al-Qalaṣādi, *Sharḥ at-talkhīs 'a^{c}māl al-ḥisāb,* édition de Farès Bentaleb, Dar al-gharb al-islami, Beyrouth, 1999.

Al-Qatrawāni, *Rashf ar-ridhāb min thugūr 'a^{c}māl al-ḥisāb,* pré-édition arabe de Hmida Hedfi, Tunis, 1998.

Al-Uqbāni, *Sharḥ at-Talkhis*, Edition arabe de Anissa Harbili, thèse de magister de l'E.N.S. Kouba, Alger 1997.

As-Samaw'al, *Al-Bāhir fil Jabr*, Edition de Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Université de Damas, 1972.

Berggren J.L., (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Brlin : Sringer-Verlag.

Boncompagni Baldassarre, *Della vita et delle opere di Gherardo cremonese*, Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Session du 27 juin 1851).

Cajori Florian , (1929), *A History of Mathematical Notations*, New York : Dover Publications Inc., 1993.

Dantzig Tobias, (1974), *Le nombre, langage de la science*, Paris : Librairie Albert Blanchard.

Djebbar Ahmed, La production scientifique arabe, sa diffusion et sa réception au temps des croisades : l'exemple des mathématiques, in *Actes du colloque de Louvain-La-Neuve, Occident et Proche-Orient : Contacts scientifiques au temps des Croisades* (24-25 mars 1997)

Djebbar Ahmed, *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIème - XIVème siècles*, Thèse de doctorat, Publications mathématiques d'Orsay, 1985, n°81-02.

Guergour Youssef, *al-'A^{c}māl al-Riyādhiya l-Ibn Qunfudh al-Qusantīni*, Thèse de Magistère, Ecole Normale Supérieure d'Alger, 1990.

Harbili Anissa, *Al-Uqbāni, Sharḥ at-talkhīs,* , thèse de magister de l'E.N.S. Kouba, Alger 1997.

Hughes Barnabas B., (1989), *Robert of Chester's Latin Translation of al-Khwārizmi's al-Jabr*, Stuttgart : Collection Boethuis XIV.

Ifrah Georges, (1999), *Histoire universelle des chiffres,* Paris : Robert Laffont.

Ibn Ghāzi, *Bughyat at-tullāb fi sharḥi munyat al-ḥisāb*, édition de Mohamed Souissi, Université d'Alep, 1983.

Ibn al-Ha'im, *Sharh al-Urjuza al-yasminiya,* edition et commentaries en arabe et en français par Mahdi Abdeljaouad, Tunis : ATSM, 2003.

Karpinski L.C. (1915), *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, Frankfurt : Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1997.

Lamrabet Driss, (1994), *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat.

Monteil Vincent (1968), *Ibn Kaldūn : Discours sur l'histoire universelle (La Muqaddima)*, Traduction nouvelle, préface et notes, Beyrouth : Comission libanaise pour la traduction des chefs d'euvres.

Rashed Roshdi (1997), *Histoire des sciences arabes, 2 : Mathématiques et Physique*, Paris : Le Seuil.

Sa^{c}ad al-Andalusi, *Tabakāt al-Umam*, édition d'al-Laid Boualwane, Dar at-Talya, Beyrouth, 1985

Saydan Ahmad Sélim, (1986), *Tārikh ^{c}ilm al-jabr fil ^{c}alam al-^{c}arabī,* Koweit.

Serfati Michel, (1997), *La constitution de l'écriture symbolique mathématique,* Thèse (Université Paris 1).

Sesiano Jacques, (1999), *Une introduction à l'histoire de l'algèbre, Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance,* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Shawki Jalal, (1981), *al-'A^{c}māl ar-riādya li-Bahā ad-Dīn al-^{c}Amilī*, Le Caire.

van der Waerden, B.L., (1985), *A History of Algebra from al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Berlin : Springer-Verlag.

Souissi Mohamed, (1969), *Talkhīs 'a^{c}māl al-ḥisāb,* texte étabi , annoté et tranduit en français, Tunis : Publication de l'Université de Tunis.

Woepke François, *Notes sur les notations employées par les arabes*, Académie des sciences, vol. 39, pp.162-5, Paris 1854

Woepke François, *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux*, Journal Asiatique, 5ème série, vol. IV, Paris 1854.

Zammouli Touhami, *al-'A^{c}māl al-riyādhiya li Ibn al-Yāsamīn*, Thèse de Magistère, Ecole Normale Supérieure d'Alger, 1993.

Zarrouqi Moqtadir, *al-Kusūr fi at-Taqlīd ar-Ryādhī al-maghribī*, Alger : ENS Kouba, 1988